

# **Perfekt 4-politópok konstrukciója és osztályozása**

**Gévay Gábor doktori értekezése**

**Szegedi Tudományegyetem**

**Bolyai Intézet**

**Szeged, 2004**



*„I want to suggest that geometry is  
that part of mathematics in which  
visual thought is dominant.”*

Michael Atiyah [1]

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2. Előismeretek</b>	<b>3</b>
2.1. Konvex politópok .....	3
2.2. Tesszelációk .....	5
2.3. Csoportthatás és politópok geometriai szimmetriája .....	6
2.4. Szimmetrikus politópok néhány klasszikus osztálya .....	7
2.5. Véges Coxeter-csoportok .....	9
2.6. A Wythoff-konstrukció .....	12
2.7. Szabályos politópok .....	13
2.8. Perfekt politópok .....	14
<b>3. Wythoff-féle perfekt 4-politópok</b>	<b>19</b>
3.1. Első fajta perfekt Wythoff-politópok .....	19
3.2. Kepler-politópok .....	20
3.3. Második fajta perfekt Wythoff-politópok .....	24
3.4. Második fajta perfekt Wythoff-politópok polárisai .....	32
3.5. Harmadik fajta perfekt Wythoff-politópok .....	35
<b>4. Nem-Wythoff perfekt 4-politópok</b>	<b>40</b>
4.1. Konstrukció szabályos politópokból .....	40
4.2. Kepler-politópok részleges csonkítása .....	46
4.3. A $W_4(i,j)$ politópok polárisa .....	48
4.4. Az $X(H,T)$ politóp .....	50



<b>5. Szeminodális perfekt 4-politópok</b>	<b>54</b>
5.1. Az $X(H,I)$ politóp .....	54
5.2. Az $Y(O,I)$ politóp .....	57
5.3. Az $X(I,T)$ politóp .....	58
5.4. Az $Y(I,T)$ politóp .....	63
5.5. Az $X(H,I,T)$ politóp .....	65
<b>6. Egy osztályozási séma</b>	<b>70</b>
<b>7. Kitekintés</b>	<b>71</b>
7.1. Barátságos politópok .....	71
7.2. Kövér politópok .....	72
7.3. Egy politóprealizációs probléma .....	72
<b>8. Összefoglaló</b>	<b>75</b>
<b>9. Summary</b>	<b>79</b>
<b>Irodalom</b>	<b>83</b>
<b>Melléklet</b>	<b>90</b>

# 1. Bevezetés

Geometriai alakzatok szimmetriája újra és újra visszatérő tárgya a tudományos kutatásnak az ókortól napjainkig. Ezek között is különleges helyet töltenek be a szabályos poliéderek, illetve tetszőleges dimenziós analogonjaik, a szabályos politópok. Jól példázza ezt az az időről-időre felbukkanó vélemény – melynek egy korai változata már Proklosznál (412–485) előfordul –, mely szerint az *Elemek* első tizenkét könyve is azt a célt szolgálta volna, hogy Euklidész ezzel előkészítse a szabályos testek tárgyalását a XIII. könyvben [26, 63].

Az azóta eltelt sok évszázad során természetesen ez a terület is jelentős változásokon ment át. A csoportelmélet kialakulásával és a 19. század folyamán történt megerősödésével megeremtődtek a szimmetriavizsgálatok szigorú matematikai alapjai. Ez lehetővé tette Ludwig Schläfli számára, hogy 1850 körül – a háromnál több dimenziójú terekben végzett kutatások egyik úttörőjeként – meghatározza az összes szabályos politópokat és azok szimmetriacsoportjait négy, illetve négynél több dimenzióban.

A szabályos politópok (és szabályos térkitöltések) szimmetriacsoportjaitól a tükrözéscsoportok általános elméletéig mindenekelőtt Coxeter munkásságán keresztül vezet az út. Már ez az elmélet is mutatja, hogy egy konkrét geometriai problémakörből az absztrakció és általánosítás természetes folyamata milyen messzire vihet minket, hiszen például a tükrözéscsoportok egy másik klasszikus előfordulási helye a Lie-algebrák elmélete. Az absztrakt Coxeter-csoportok elméletének pedig ma már számos elágazása van a modern matematika legkülönbözőbb területei felé.

Maguk a szabályos politópok sokféle általánosításhoz szolgálnak kiindulópontként. A konvex geometria keretei között ehhez a szimmetriafeltételek gyengítése kínál lehetőséget. Három dimenzióban a legrégebbi példa szintén az ókorból származik: az arkhimédeszi testeké. Tetszőleges dimenzióban ezeknek az uniform politópok felelnek meg, amelyek egységes tárgyalása szintén Coxeter nevéhez fűződik [12, 15, 17].

Az alkalmazások szempontjából fontosak három dimenzióban a laptranzitív poliéderek, hiszen ezek között ott vannak a geometriai krisztallográfiában több, mint másfél évszázada jól ismert kristályformák [24].

A konvexitást elvetve, de a regularitás feltételét az eredeti geometriai értelemben megtartva jutunk a Kepler–Poinsot-féle csillagpoliéderekhez; ezek analogonjainak dimenziószámától független leírását szintén Coxeter tette teljessé



[13]. Az általánosítás további lehetőségét találta ebben az irányban Grünbaum a 70-es években [45].

Még mindig geometriai objektumoknál maradva, de a geometriai szimmetriát kombinatorikus szimmetriára cserélve, a regularitás kombinatorikus változatát megőrző alakzatok is sokfélék. Az egyik nevezetes példa éppen szegedi eredetű: a Szilassi-poliéder (1986, [84]; ld. még [2, 22]). Ugyancsak a 80-as években Bokowski, McMullen, Schulte és Wills egész sor munkát jelentetett meg 3-dimenziós kombinatorikusan reguláris poliéderekről [76].

Egy politóp lapjai (részbenrendezett) halmazának bizonyos kombinatorikus tulajdonságait – és a kombinatorikus regularitást – megőrizve további általánosítás lehetséges. Így nyerjük a „szabályos incidencia-komplexusokat”. Ezt a kutatási irányt Danzer és Schulte kezdeményezték a 80-as évek elején publikált munkáikkal. Ennek folytatásaként az azóta eltelt két évtized alatt McMullen és Schulte az „absztrakt szabályos politópok” gazdag elméletét építették ki, aminek összefoglalása a frissen megjelent terjedelmes [63] monográfia.

Ebbe a fogalmi és elméleti háttérbe illeszkedik S. A. Robertson kezdeményezése, aki a 80-as évek első felében vezette be a szabályos politópok újabb általánosításaként a perfektestek fogalmát [72, 73] (ezek kompakt konvex halmazok az  $\mathbb{E}^n$  térben, amelyek nem feltétlenül politópok). Robertson és munkatársai ebben a politópokénál általánosabb kontextusban folytatták vizsgálataikat. Ezen belül a 4-dimenziós perfektest politópok témája viszonylag hamar lekerült a napirendről, a következő okból. Rostami 1987-ből származó sejtése szerint a perfektest 4-politópok – vagy ezek polárisai – Wythoff-politópok egy szűk osztályát képezik (ez az osztály jól ismert Coxeter munkái alapján). Erre az egyébként meglehetősen plauzibilis sejtésre Madden 1995-ben közölt egy bizonyítást, amellyel a perfektest 4-politópok teljes leírása, illetve osztályozása elintézettnek látszott.

A jelen dolgozat ezen a ponton csatlakozik a szóban forgó területhez. A szerző 1994-ben megjelent [31] cikkében leírt „Kepler-politópok” ugyanis éppen a Rostami-sejtés által megengedett Wythoff-politópok polárisai. Ezt követően csakhamar kiderült, hogy Madden bizonyítása hibás, amit nemcsak a hibák explicit kimutatásával, hanem a Rostami-sejtéssel szembeni ellenpéldák egész sorával is igazolni lehetett [35]. Ezen ellenpéldák egy része továbbra is Wythoff-politóp – ezeket ismertetjük a 3. fejezetben. A 4. fejezetben tárgyalt nem-Wythoff perfektest 4-politópokkal már fogalmilag távolabbra kerülünk a Rostami-sejtés által megengedett politóposztálytól. Az 5. fejezetben definiált – és egyedi módszerekkel megkonstruált – szemínodális politópok néhány példájával pedig azt mutatjuk meg, hogy a perfektest politópok köre még ennél is tágabb, és jóval túlmutat azon, mint amit az ilyen irányú vizsgálatok kezdetén egyáltalán várni lehetett.



## 2. Előismeretek

### 2.1. Konvex politópok

*Konvex politóp*nak nevezzük az  $\mathbb{R}^d$  euklideszi térben egy véges  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  ponthalmaz konvex burkát:

$$P = \text{conv } X := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Egy másik definíció szerint egy  $P$  konvex politóp véges sok zárt féltér korlátos metszete. Ez azt jelenti, hogy  $P$  előáll egy véges lineáris egyenlőtlenség-rendszer korlátos megoldáshalmazaként:

$$P = P(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^T x \leq b_i, 1 \leq i \leq m\},$$

ahol  $a_i^T$  egy  $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$  mátrix sorvektora,  $b_i$  pedig egy  $b \in \mathbb{R}^m$  vektor  $i$ -edik komponense.

Az állítás, mely szerint a két definíció ekvivalens egymással, a konvex politópok elméletének alaptételét képezi [7, 44, 58, 62, 85].

Egy  $P$  konvex politóp *dimenzióján* affin burkának, vagyis az  $\mathbb{R}^d$  tér  $P$ -t tartalmazó legszűkebb affin alterének dimenzióját értjük. Egy  $d$ -dimenziós konvex politópot röviden *d-politóp*nak is nevezünk. (A továbbiakban politóp alatt konvex politópot fogunk érteni).

A  $H$  hipersíkot a  $P$  politóp *támasz-hipersíkjának* nevezzük, ha  $H \cap P$  nem üres és a  $H$  által határolt egyik zárt féltér tartalmazza  $P$ -t. A  $P$  politóp egy *valódi lapjának* nevezzük  $P$ -nek egy  $H$  támasz-hipersíkjával képezett nemüres metszetét. Egy politóp valódi lapja szintén politóp. Egy  $d$ -politóp 0-, 1-, illetve  $(d-1)$ -dimenziós lapját rendre *csúcsnak*, *élnek*, illetve *hiperlapnak* nevezzük. Egy  $P$   $d$ -politóp esetén az üres halmazt és  $P$ -t *nemvalódi lapoknak* nevezzük, melyek dimenziója  $-1$ , illetve  $d$ . Jelölje  $f_i(P)$  egy  $P$   $d$ -politóp  $i$ -dimenziós lapjainak számát ( $i = 0, \dots, d-1$ ). Ekkor az  $(f_0(P), \dots, f_{d-1}(P))$  rendezett szám- $d$ -est  $P$  *f-vektorának* nevezzük és  $f(P)$ -vel jelöljük. Az *f-vektor* komponenseire érvényes az *Euler–Poincaré-formula*:

$$\sum_{i=-1}^d (-1)^i f_i(P) = 0.$$

Egy politóp összes lapjai a halmazelméleti tartalmazási relációra nézve részbenrendezett halmazt képeznek. Ez a részbenrendezett halmaz *graduált*, ami azt jelenti, hogy korlátos és minden maximális láncának hossza ugyanaz. Másrészt, ez a részbenrendezett halmaz algebrai értelemben háló is. Ezt a hálót a politóp *laphálójának* nevezzük. Egy  $P$  politóp laphálóját  $L(P)$ -vel fogjuk jelölni.  $L(P)$  egy maximális láncát *zúszlónak* nevezzük.

A  $P$  és  $Q$  politópokat *kombinatorikusan ekvivalensnek* mondjuk, ha létezik egy  $\lambda: L(P) \rightarrow L(Q)$  háló-izomorfizmus. Másrészt, tegyük fel, hogy  $P$  és  $Q$  olyan politópok, melyek laphálójá anti-izomorf. Ez azt jelenti, hogy van olyan leképezés  $L(P)$ -ből  $L(Q)$ -ba, amely bijektív és rendezésfordító. Ekkor azt mondjuk, hogy  $P$  és  $Q$  egymás *duálisa* (vagy  $Q$  a  $P$  duálisa). Nyilvánvaló, hogy bármely  $d$  esetén mind a kombinatorikus ekvivalencia, mind a dualitás szimmetrikus relációt határoz meg az összes  $d$ -politópok halmazán. Ezt a halmazt  $\mathcal{P}_d$ -vel jelöljük. Másrészt, az összes politópok halmazának jelölésére a  $\mathcal{P}$  szimbólumot fogjuk használni.

A most következő három konstrukcióval egy unér és két binér műveletet határozunk meg  $\mathcal{P}$ -n.

Legyen  $P$  egy politóp, melynek csúcsai  $v_1, \dots, v_r$ . E politóp  $P^*$  *polárisát* a következőképpen definiáljuk:  $P^* = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in P, \langle x - c, y - c \rangle \leq 1\}$ , ahol  $c$  a politóp súlypontja:  $c = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r v_i$ . Megmutatható, hogy  $P$  és  $P^*$  egymás duálisa. Megjegyezzük, hogy egy politóp polárisának ez a fogalma szűkebb, mint ahogyan az a politópok kombinatorikus elméletében használatos, és valójában azzal egyezik meg, amit Coxeter egy politóp *reciprokának* nevez (egységgömbre vonatkoztatva) [13]. Az általunk választott fogalomhasználattal Robertson [73] követjük.

Legyen  $P$  egy  $d$ -politóp egy  $\mathbb{R}^d$  térben és  $Q$  egy  $d'$ -politóp egy  $\mathbb{R}^{d'}$  térben. Azonosítsuk az  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$  teret az  $\mathbb{R}^{d+d'}$  térrel a következő leképezés segítségével:  $\varphi: (x, y) \mapsto z$ , ahol  $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{d+d'}$ , és  $z_i = x_i$ ,  $(i = 1, \dots, d)$ , valamint  $z_{d+j} = y_j$ ,  $(j = 1, \dots, d')$ . Ezzel  $\mathbb{R}^d$ -t és  $\mathbb{R}^{d'}$ -t beágyasztuk  $\mathbb{R}^{d+d'}$ -be egymás ortogonális kiegészítőiként. A  $P \times Q$  Descartes-szorzatnak szintén egy beágyazását nyertük az  $\mathbb{R}^{d+d'}$  térbe, amit  $P$  és  $Q$  *szorzatának* nevezünk és  $P \square Q$ -val jelölünk [28].

Az előbbi beágyazást használva, tekintsük most a  $P \times \{d\} \cup \{c\} \times Q$  halmazt, ahol  $c$  és  $d$   $P$ -nek, illetve  $Q$ -nek a súlypontja. E halmaz konvex burkát  $P$  és  $Q$  *ko-szorzatának* nevezzük és  $P \diamond Q$ -val jelöljük [28].

Nyilván mind  $P \square Q$ , mind  $P \diamond Q$   $(d+d')$ -politóp. Érvényes továbbá az alábbi „de Morgan-típusú” azonosság, ha  $P$  és  $Q$  súlypontja egybeesik [28]:

$$(P \square Q)^* = P^* \diamond Q^* \quad (2.1)$$



Egy  $P$  politóp *prím*, ha nincs olyan legalább egydimenziós  $Q_1$  és  $Q_2$  politóp, hogy  $P$  izometrikus a  $Q_1 \sqcup Q_2$  vagy  $Q_1 \diamond Q_2$  politóppal.

(Megjegyezzük, hogy az itt definiált két binér művelet jelölése, elnevezése, illetve a prím politóp fogalma nem egységes az irodalomban; a jelen verziót, mint a perfekt politópok kontextusába illeszkedőt, Robertson nyomán választottuk [28]; eltérő konvenciót követ pl. [48].)

A későbbiekben szükségünk lesz a konvex politópokkal kapcsolatos néhány alapfogalom szférikus változatára is. A hipersík szerepét ekkor a főgömb (az  $S^{d-1}$  gömbnek az origón átmenő hipersíkkal vett metszete, ami egy  $S^{d-2}$  gömb) veszi át, a féltér szerepét a félgömb, stb. Az  $S^{d-1}$  gömb egy  $X$  részhalmazát akkor mondjuk konvexnek, ha bármely két olyan pontja, amely nem diametrálisan átellenes helyzetű, összeköthető a halmaz által tartalmazott,  $\pi$ -nél rövidebb ívvel.  $X$ -et *erősen konvexnek* mondjuk, ha nem tartalmaz átellenes helyzetű pontpárokat ([23], 400. o.). (A mi konstrukcióinkban csupán erősen konvex szférikus halmazok fognak előfordulni.) A szférikus politóp fogalma ekkor az euklideszi-vel analóg módon adódik, azzal a feltétellel, hogy megköveteljük a szférikus értelemben vett (erős) konvexitást.

## 2.2. Tesszelációk

Legyen  $X$  az  $\mathbb{E}^d$  vagy az  $S^{d-1}$  tér. Legyen  $\mathcal{T}$  a tér zárt részhalmazainak egy családja, amely véges ( $S^{d-1}$ -ben), vagy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen ( $\mathbb{E}^d$ -ben).  $\mathcal{T}$  elemeiről, melyeket *tartományoknak* fogunk nevezni, feltesszük, hogy topologikus gömbök, melyek belseje nem üres.  $\mathcal{T}$ -t *tesszelációnak* nevezzük, ha

- (1) két különböző tartománynak nincs közös belső pontja és
- (2) az összes tartományok uniója egyenlő az egész térrel [46, 75, 77].

Kevésbé pontos fogalmazásban e két tulajdonságot úgy is szokás említeni, hogy  $\mathcal{T}$  tartományai hézagmentesen és átfedések nélkül lefedik a teret. (A magyar nyelvű matematikai – illetve fizikai – irodalomban a tesszelációra használatos egyéb elnevezések: *parkettázás*, *kövezés*, *csempézés*, illetve speciálisan 2 dimenzióban: *mozaik*.)

Ha egy  $P$   $d$ -politópot a súlypontjával egybeeső középpontú  $S^{d-1}$  gömbre radiális vetítéssel leképezünk, a hiperlapok összességének képe a gömbön egy tesszelációt alkot. E szférikus tesszeláció tartományai szférikus  $(d-1)$ -politópok. Ezt a tesszelációt a  $P$  politóp *gömbi képének* fogjuk nevezni (Géva, [35]).

## 2.3. Csoportthatás és politópok geometriai szimmetriája

Legyen  $G$  egy csoport és  $X$  egy halmaz. Azt mondjuk, hogy  $G$  *hat* az  $X$  halmazon, ha bármely  $g \in G$  és  $x \in X$  elemhez van olyan  $g \cdot x \in X$ , melyre teljesülnek az alábbi feltételek:

- (1) tetszőleges  $g_1, g_2 \in G$  és  $x \in X$  esetén  $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ ;
- (2) az  $e \in G$  egységelem és tetszőleges  $x \in X$  elem esetén  $e \cdot x = x$ .

Ez azzal egyenértékű, hogy létezik a  $G$  csoportnak egy homomorfizmusa az  $X$  teljes transzformációcsoportjába, vagyis az  $X$ -et önmagába vivő összes bijekciók csoportjába.

A továbbiakban bizonyos kényelmi okokból a  $g \cdot x$  jelölés helyett a  $g(x)$  jelölést fogjuk használni.

Egy  $Y \subseteq X$  részhalmaz és  $g \in G$  esetén  $Y$  egy *transzformáltján* a következő halmazt értjük:  $g(Y) = \{g(x) \mid x \in Y\}$ . Speciálisan, beszélhetünk egyetlen  $x \in X$  elem transzformáltjáról. Egy  $x \in X$  elem összes transzformáltjainak halmazát  $x$  *orbitjának* (vagy *pályájának*) mondjuk. Az ugyanazon orbithez tartozó elemeket (a  $G$  csoportra nézve) egymással *ekvivalensnek* is szoktuk nevezni.  $G$  hatása  $X$ -et orbitok diszjunkt uniójára bontja. Ha  $X$  egyetlen orbitot képez, azt mondjuk, hogy  $G$  *tranzitíven hat* az  $X$  halmazon. Ez azzal ekvivalens, hogy bármely  $x, y \in X$ -re van olyan  $g \in G$ , hogy  $g(x) = y$ . Tetszőleges  $x \in X$  esetén a  $G_x = \{g \mid g(x) = x\}$  halmazt  $x$  *stabilizátorának* nevezzük.  $G_x$  részcsoportha  $G$ -nek.  $x$ -et *fixpontnak* nevezzük, ha stabilizátora  $G$ -vel egyenlő. Megjegyezzük, hogy egy  $x \in X$  elem helyett egy  $Y \subseteq X$  részhalmazt választva, mind az orbit, mind a stabilizátor fogalma analóg módon definiálható.

Legyen most  $X$  az  $\mathbb{E}^d$  tér és  $G$  ennek a térnek egy izometriacsoportja.  $G$ -ről feltesszük, hogy *diszkrét* csoport, ami alatt azt értjük, hogy bármely  $x \in \mathbb{E}^d$  pont orbitja diszkrét halmaz.  $\mathbb{E}^d$  egy  $D$  zárt részhalmazát  $G$  *alaptartományának* (vagy *fundamentális tartományának*) nevezzük, ha transzformáltjai hézagmentesen és átfedések nélkül lefedik a teret a következő értelemben:

- (1) két különböző transzformáltnak nincs közös belső pontja, azaz

$$g_1(D) \neq g_2(D) \Rightarrow \text{int} g_1(D) \cap \text{int} g_2(D) = \emptyset \quad (g_1, g_2 \in G), \quad \text{és}$$

- (2) az összes transzformáltak uniója egyenlő az egész térrel:

$$\bigcup_{g \in G} g(D) = \mathbb{E}^d.$$

$D$  transzformáltjainak összességét a  $G$  csoporthoz tartozó *fundamentális tesszlációnak* nevezzük.

Legyen  $K$  egy részhalmaz  $\mathbb{E}^d$ -ben.  $K$  affin burkának egy izometriáját, amely  $K$ -t önmagára képezi le,  $K$  *szimmetriaműveletének* nevezzük.  $K$  összes szimmetriaműveletei csoportot képeznek, amit  $K$  *szimmetriacsoportjának* nevezünk és  $G(K)$ -val fogunk jelölni.

Legyen most  $P$  egy politóp és  $G(P)$  a szimmetriacsoportja. A polárisnak az 2.1. alfejezetben adott definíciójából következik, hogy  $G(P) = G(P^*)$ . A binér politópműveletekre pedig érvényes a következő reláció:

$$G(P \square Q) = G(P \diamond Q) \supseteq G(P) \times G(Q)$$

Adott  $P$   $d$ -politóp és  $G(P)$  szimmetriacsoport esetén jelölje  $\theta_i(P)$  az  $i$ -dimenziós lapok orbitjainak számát. Ekkor a  $(\theta_0(P), \dots, \theta_{d-1}(P))$  szám- $d$ -est Robertson [73] nyomán  $P$  *orbit vektorának* nevezzük és  $\theta(P)$ -vel jelöljük. Ha  $\theta_0(P)$ ,  $\theta_1(P)$ , illetve  $\theta_{d-1}(P)$  értéke 1, a politópot rendre *csúcstranzitív*, *éltranzitív*, illetve *hiperlap-tranzitív* politópnak mondjuk. A hiperlap-tranzitív politópokat *izohedrális* politópoknak is szokás nevezni.

A szimmetriatulajdonságok alkalmas kombinálásával változatos politóposztályok keletkeznek (ezekről, bizonyos általánosításaiikkal együtt, egy részletesebb áttekintés található pl. Martini [61] dolgozatában; ld. még Schulte, [78]). Néhány jól ismert osztályt ezek közül a következő fejezetben fogunk röviden áttekinteni.

Politópok geometriai szimmetriáinak vizsgálatába Robertson [28, 72, 73] bevezette a *szimmetria-ekvivalencia* fogalmát, melyet a következőképpen definiált.

**2.1. Definíció.** A  $P$  és  $Q$   $d$ -politópokat *szimmetria-ekvivalensnek* mondjuk, ha létezik olyan  $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  izometria és  $\lambda: L(P) \rightarrow L(Q)$  háló-izomorfizmus, hogy minden  $g \in G(P)$  és  $F \in L(P)$  esetén teljesül a  $\lambda(g(F)) = (\varphi g \varphi^{-1})(\lambda(F))$  egyenlőség. A  $\mathcal{P}_d$  halmaz megfelelő ekvivalenciaosztályait *szimmetriatípusoknak* nevezzük.

## 2.4. Szimmetrikus politópok néhány klasszikus osztálya

Az alábbiakban röviden áttekintünk néhány jól ismert politóposztályt. Erre azért is szükség van, mert az itt említett osztályok mindegyikének bizonyos képviselői előfordulnak a későbbiekben konstruálandó 4-politópok hiperlapjaként, illetve szerepe van a konstrukciókban.

- *Szabályos politópok.* Egy  $P$  politóp szabályos, ha  $\theta(P) = (1, \dots, 1)$ . Megmutatható, hogy egy politóp akkor és csak akkor szabályos, ha *zászlótranzitív*, azaz,

ha szimmetriacsoportja tranzitív a zászlókon (ezzel a regularitásnak már két ekvivalens definíciója áll rendelkezésünkre; ennél azonban jóval több ismeretes [13, 44]). A szabályos 3-politópokat *platóni testeknek* is szokás nevezni.

- *Uniform politópok.* Coxeter nyomán egy politópot uniformnak nevezünk, ha csúcstranzitív és hiperlapjai uniform politópok [11–13, 15, 17]. Két dimenzióban a szabályos és uniform politóp fogalma egybeesik.

- *Félig szabályos testek.* Ezek a 3-dimenziós nem-szabályos uniform politópok. 3 osztályuk létezik, melyekre az alábbi 3 pontban röviden kitérünk.

- *Arkhimédeszi testek.* Olyan félig szabályos testek, melyek szimmetriacsoportja megegyezik valamely platóni test szimmetriacsoportjával, vagy 2 indexű forgási részcssoportjával. 13 típusuk létezik.

- *Félig szabályos prizmák.* Legyen  $K$  egy egységnyi oldalélű (konvex) szabályos  $n$ -szög ( $n \neq 4$ ) és  $I$  egy egységszakasz. A félig szabályos prizma ekkor egy  $K \square I$  alakú politóp, melynek két  $n$ -szög alakú lapját alaplapnak,  $n$  darab négyzetlapját pedig oldallapnak nevezzük.

Ha megengedjük, hogy  $I$  nem csak egységszakasz lehet, akkor az általános  $n$ -gonális prizmákat ( $3 \leq n < \infty$ ) kapjuk, melyek oldallapjai téglalapok. Prizmák ennél általánosabb változataival jelen kontextusban nem lesz dolgunk, ezért az ilyen prizmákra ezt a geometriai krisztallográfiából kölcsönzött elnevezést használjuk. Speciálisan,  $n = 3, 4, \dots$  esetén *trigonális*, *tetragonális*, stb. prizmáról beszélünk.

- *Félig szabályos antiprizmák.* Egy  $n$ -gonális prizma két alaplapja közül az egyiket (a saját síkjában, a középpontja körül)  $\pi/n$  szöggel elforgatva, a két sokszög konvex burka egy  $n$ -gonális antiprizmát szolgáltat. A két  $n$ -szöget itt is alaplapnak nevezzük, van továbbá  $2n$  darab egyenlő szárú háromszög alakú oldallap. Az alaplapok távolságát alkalmasan választva, az oldallapok szabályos háromszögek lesznek, így ekkor félig szabályos antiprizmát kapunk (kivéve, ha  $n = 3$ , amikor is a szabályos oktaéder áll elő).

- *Catalan-testek.* Az arkhimédeszi testek polárisai. Ebből következik, hogy a Catalan-testek laptranzitívek.

- *$n$ -gonális dipiramisok.* Az  $n$ -gonális prizmák polárisai. Szintén laptranzitívek, lapjaik általános esetben egyenlő szárú háromszögek. Az (1) relációval összhangban, előállnak  $K \diamond I$  alakban, ahol  $K$  egy szabályos sokszög,  $I$  pedig egy szakasz. Nevük az előállítás egy másik módjára utal: közös alaplappal rendelkező két egybevágó, szabályos  $n$ -oldalú gúla egyesítése. A későbbiekben szükségünk lesz a csúcsok megkülönböztetésére: az alaphoz tartozó csúcsokat *báziscsúcsnak*, a fennmaradó két csúcsot pedig *apikális csúcsnak* fogjuk nevezni. (Megjegyezzük, hogy a prizmákhoz hasonlóan a dipiramis fogalmát is a geometriai krisztallográfiában

megszokott alakjában használjuk; a kombinatorikus geometriában e fogalomnak egy általánosabb változata használatos.)

- *n-gonális sztreptoéderek* [47, 66]. Az *n*-gonális antiprizmák polárisai. Laptranzitívek, lapjaik deltoidok.  $n = 3$  esetben a deltoidok rombuszok, a megfelelő poliéder neve ekkor *romboéder*.

- *Johnson-testek*. Norman W. Johnson megvizsgálta, melyek az összes lehetséges 3-politópok, amelyeknek lapjai kizárólag szabályos sokszögek [52]. A szabályos és félig szabályos testeken kívül 92 típust talált, melyekhez egy alkalmas terminológiát is kidolgozott. Johnson listájának teljességét Zalgaller igazolta 1967-ben [61].

- *Kristályformák*. Az izohedrális 3-politópok szimmetriatípusait a geometriai krisztallográfiában (zárt, egyszerű) kristályformáknak nevezik, ha szimmetriacsoportjuk kristálytani pontcsoport. Ez utóbbi olyan véges izometriacsoport, amely eleget tesz a kristálytani korlátozásnak, ami azt jelenti, hogy nem tartalmaz ötödrendű vagy hatnál magasabb rendű transzformációt [13, 16]. A kvázikristályoknak az 1980-as években történt felfedezésével [79] jelentőséghez jutottak azok a szimmetriatípusok is, amelyekre nem vonatkozik a kristálytani korlátozás. Ezeket *kvázikristály-formának* nevezzük. A kristályformák és kvázikristályformák teljes listája jól ismert [8, 24, 30, 47, 55, 66]. Néhány olyan konkrét kristályforma leírását, amelyek a konstrukcióinkban meg fognak jelenni, előfordulásuk helyén fogjuk megadni.

## 2.5. Véges Coxeter-csoportok

Legyenek a  $W$  csoport generátorai  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , definiáló relációi pedig

$$(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}} = 1 \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

ahol  $m_{ij}$  pozitív egész vagy  $\infty$ , továbbá  $m_{ii} = 1$  és  $m_{ij} \geq 2$  ha  $i \neq j$ . Az ilyen módon prezentált csoportot *Coxeter-csoportnak* nevezzük [51].

Megjegyezzük, hogy egy  $H$  hipersíkra való tükrözés olyan  $\sigma_H$  involutórius izometria, amelynek fixponthalmaza  $H$ ; ha  $H$  tartalmazza az origót, és normálvektorát  $h$ -val jelöljük, akkor  $\sigma_H$  következő formulával adható meg:

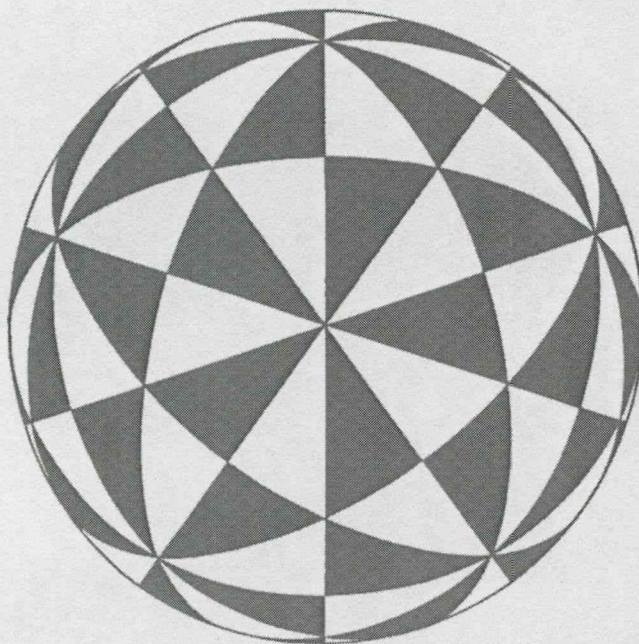
$$\sigma_H(x) = x - 2 \frac{\langle x, h \rangle}{\langle h, h \rangle} h.$$



Minden  $W$  véges Coxeter-csoporthoz van olyan  $n$ , hogy  $W$  megadható az  $\mathbb{R}^n$  téren ható izometriacsoportként úgy, hogy a  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  generátorok (hipersíkra vonatkozó) tükrözések. Ezért az ilyen csoportot (véges) tükrözéscsoportnak is nevezik. A továbbiakban Coxeter-csoporton mindig véges tükrözéscsoportot fogunk érteni.

Az ilyen módon megadott Coxeter-csoport továbbá *esszenciálisan hat* az  $\mathbb{R}^n$  téren, ami alatt azt értjük hogy nincs nem-nulla fixpontja  $\mathbb{R}^n$ -ben [51]. Az egyszerűbb szóhasználat érdekében az  $\mathbb{R}^n$  téren esszenciálisan ható Coxeter-csoportot  *$n$ -dimenziós Coxeter-csoportnak* fogjuk nevezni.

Egy  $W$   $n$ -dimenziós Coxeter-csoport hatását célszerű az  $\mathbb{S}^{n-1}$  gömbre megszorítva vizsgálni. Tekintsük a  $W$ -ben előforduló összes tükrözésekhez tartozó hipersíkok  $\mathcal{H}$  halmazát. Jelölje  $D$  az  $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \mathcal{H}$  halmaz valamely összefüggő komponensének lezártját.  $D$  a csoport egy alaptartománya az  $\mathbb{S}^{n-1}$  gömbön. Coxeter egy alapvető tétele szerint az alaptartomány egy (szférikus) szimplex ([13], Theorem 11.23). Egy szemléletes példaként a 2.1. ábrán a  $H_3$  Coxeter-csoport (a szabályos ikozaéder szimmetriacsoportja) fundamentális tesszelációját láthatjuk.



2.1. ábra

$D$  választható úgy, hogy a hiperlapjaira illeszkedő támasz hipersíkok pontosan a  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  generátorokhoz tartozó tükr-hipersíkok legyenek. (Megjegyezzük, hogy a Lie-algebrák kontextusában  $D$  transzformáltjait *kamráknak* is



szokás nevezni; a hiperlapok ekkor a kamra *falai*. A „fal” elnevezést mi is fogjuk használni.) A geometriai elrendezésből következik, hogy az  $i$ -edik és  $j$ -edik hiperlap közötti diéderes szög éppen  $\pi/m_{ij}$ . A kettejük metszeteként adódó hiperél (azaz  $(n-2)$ -dimenziós lap) ekkor egy olyan forgatás fixponthalmazához tartozik, amelynek rendje  $m_{ij}$ .

Tekintsük a  $D$  alapszimplex  $i$ -edik csúcsát, ami megállapodás szerint az  $i$ -edik fallal szemben levő csúcs. Ennek stabilizátora olyan Coxeter-csoport, amelyet a  $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n$  tükrözések generálnak. Jelöljük ezt a csoportot  $W_i$ -vel.  $W_i$ -nek egyetlen fixpontja van (az  $\mathbb{S}^{n-1}$  gömbön), maga a tekintett csúcs. Általánosabban, legyen  $I = \{1, \dots, n\}$  egy indexhalmaz, amely  $W$  generátorait indexeli, és legyen  $J$  ennek egy részhalmaza, melynek  $I \setminus J$  komplementerét  $J^c$ -vel fogjuk jelölni. Legyen  $F_J$   $D$ -nek a  $V_j$ ,  $j \in J$  csúcsok által meghatározott lapja.  $F_J$ -t pontonként fixálja  $W$ -nek az a  $W_J$  részcsoportha, amelyet a  $\sigma_j$ ,  $j \in J^c$  tükrözések generálnak, és amely maga is Coxeter-csoport.

A  $D$  szimplex alakja (illetve ekvivalens módon,  $W$  prezentációja) megadható a hozzá tartozó *Coxeter-diagram* (vagy *Coxeter-gráf* segítségével. Ez egy  $n$  ponttal rendelkező gráf, amelynek pontjai a generátorokat reprezentálják. Az  $i$ -edik és  $j$ -edik pontot pontosan akkor köti össze él, ha  $m_{ij} \geq 3$ . Az él az  $m_{ij}$  címkét viseli, ha  $m_{ij} > 3$ .

A Coxeter-diagram vagy összefüggő, vagy egynél több komponensből áll. A  $W$  csoportot ennek megfelelően *irreducibilisnek*, illetve *reducibilisnek* nevezzük. A második eset annak felel meg, hogy a csoport az egyes komponensek által reprezentált csoportok direkt szorzata. Geometriailag pedig azt jelenti, hogy a  $W$  generátoraihoz tartozó tükörhipersíkok halmaza diszjunkt részhalmazokra bomlik úgy, hogy bármely kiszemelt részhalmazhoz tartozó hipersíkok mindegyike merőleges bármely másik részhalmazhoz tartozó összes hipersíkra.

Az irreducibilis Coxeter-csoportok teljes listája jól ismert [12, 13, 15, 17, 18, 51]. Ezek közül a 4-dimenziós csoportok az alábbiak:

$$\begin{aligned}
 A_4 : & \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet = [3, 3, 3], & |A_4| &= 120 \\
 B_4 : & \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet = [3, 3, 4], & |B_4| &= 384 \\
 F_4 : & \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet = [3, 4, 3], & |F_4| &= 1152 \\
 H_4 : & \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet = [3, 3, 5], & |H_4| &= 14\,400 \\
 D_4 : & \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} = [3^{1,1,1}], & |D_4| &= 192.
 \end{aligned}$$

Minden  $W$  Coxeter-csoportnak van egy  $W^+$  2 indexű „forgási” részcsoportha, melyet az eredeti generátorok  $\sigma_1\sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\sigma_n$  szorzatai generálnak (ezek a szorzatok  $(n-2)$ -dimenziós hiperegnyes körüli forgatások).

## 2.6. A Wythoff-konstrukció

A Wythoff-konstrukció lényege a következő megfigyelés: csúcstranzitív politóp előállítható egy pont valamely alkalmas izometriacsoport szerinti pályájának konvex burkaként. W. A. Wythoff 1918-ban publikálta módszerét [14], aminek alkalmazását Coxeter lényegesen kiterjesztette [11]. Coxeter felfogásában a fent említett konstrukciós módszert akkor nevezzük Wythoff-konstrukciónak, ha a következő feltételek teljesülnek:

- (W 1) a csoport Coxeter-csoport, vagy Coxeter-csoportnak 2 indexű forgási részcsoporthoz;
- (W 2) a konstrukció kezdőpontjának helyzete olyan, hogy a kapott politóp uniform.

**2.2. Definíció.** Az olyan politópot, amelyet a (W 1) és (W 2) feltételeknek eleget tevő Wythoff-konstrukcióval előállíthatunk, *Wythoff-politópnak* nevezzük.

(Megjegyezzük, hogy a Wythoff-politóp fogalmának használata nem teljesen egységes a geometriai irodalomban – Shephard pl. a (W 1) feltételben kizárólag Coxeter-csoportot enged meg [80].)

Egy  $n$ -dimenziós Wythoff-politóp kombinatorikus típusát az határozza meg, hogy a Wythoff-konstrukció kezdőpontja a  $D$  alapszimplex melyik csúcsában, illetve melyik  $k$ -lapjának ( $0 < k < n$ ) relatív belsejében helyezkedik el.

A kombinatorikus típuson belül azonban uniform politópot a kezdőpont egyetlen meghatározott pozíciója szolgáltat. Coxeter [11] nyomán, ha a  $V_0$  kezdőpont az  $F_J \subseteq D$  lap relatív belsejében van, akkor az előző alfejezet jelöléseivel ez a pozíció a következőképpen adható meg:

$$V_0 = F_J \cap \bigcap_{i,j \in J} H_{ij},$$

ahol  $H_{ij}$  a  $D$  szimplex  $i$ -edik és  $j$ -edik hiperlapjának belső szögfelező hipersíkja.

Az ily módon kapott uniform politóp jelölésére Coxeter egy külön grafikus szimbólumot vezetett be. Ennek alapja a kiindulási  $W$  csoport Coxeter-gráfja. Ha a konstrukció kezdőpontja  $D$   $i$ -edik csúcsa, akkor a Coxeter-gráfot az  $i$ -edik generátort reprezentáló pontja körül egy karikával látjuk el. Ha a kezdőpont egy  $k$ -dimenziós  $F_J$  lap ( $0 < k < n$ ) relatív belsejében van, akkor minden  $j \in J$ -re a gráf  $j$ -edik pontját ellátjuk egy karikával. Pl. az ikozaédert  $\odot \text{---} \bullet \text{---} \odot$ , az ikozido-dekaédert pedig (ld. 2.2. (b) ábra)  $\bullet \text{---} \odot \text{---} \bullet$  jelöli (a Coxeter-gráf pontjainak

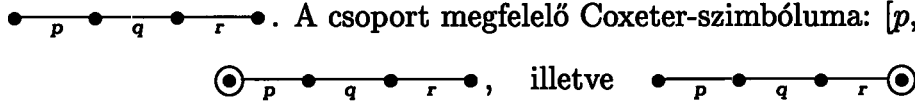
számozása, amit általában nem jelölünk, balról jobbra történik). Használatos olyan szimbólum is, amelyben a gráf minden pontja helyén van karika, de a pontok hiányoznak. Ez azt jelenti, hogy a generátor tükrözéseket kiiktattuk, vagyis az eredeti Coxeter-csoport 2 indexű forgási részcsoportját vesszük, másrészt, a kezdőpont az alaptartomány belső pontja.

Ez a grafikus szimbólum több mint egyszerű jelölés, amennyiben Coxeter megadja egy algoritmusnak a vázlatos leírását, amelynek segítségével az uniform politóp fentiek szerint jelölt gráfjának bizonyos részgráfjait véve meg lehet határozni minden  $k$ -ra a  $k$ -dimenziós lapok számát és típusát [11].

Ezenkívül Coxeter alkalmaz még egy másik jelölést is, melynek általános alakja:  $t_i W$ , ha a Wythoff-konstrukció kezdőpontja a  $W$  csoport alaptartományának  $i$ -dik csúcsa, illetve  $t_{i_1, i_2, \dots, i_j} W$ , ha a kezdőpont az alaptartomány azon  $F_J$  lapjának relatív belsejében van, melynek csúcsait  $i_1, i_2, \dots, i_j \in J$  indexelik.

## 2.7. Szabályos politópok

Vegyünk egy Coxeter-csoportot, amelynek alaptartománya *ortoszkéma*, azaz olyan (szférikus) szimplex, melynek hiperlapjai lineárisan rendezhetők úgy, hogy bármely két nem egymást követő hiperlap merőleges egymásra. (Ez azt jelenti, hogy a megfelelő generátorok kommutálnak.) Az ortoszkémát – illetve magát a csoportot – ezért lineáris Coxeter-diagram jelöli; 4 dimenzióban tehát ilyen alakú:

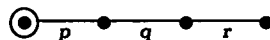


politóp ekkor szabályos, és egymás duálisa.

Ezeknek a politópoknak a *Schläfli-szimbóluma*:  $\{p, q, r\}$ , illetve  $\{r, q, p\}$ . Általánosságban,  $d \geq 3$  esetén a  $\{p_1, \dots, p_d\}$  Schläfli-szimbólum olyan szabályos  $d$ -politópot jelöl, melynek hiperlapjai  $\{p_1, \dots, p_{d-1}\}$ , csúcsalakzatai pedig  $\{p_2, \dots, p_d\}$  szabályos  $(d-1)$ -politópok. (Egy szabályos politóp *csúcsalakzata* nem más, mint az egy csúcsból induló élek felezőpontjainak konvex burka.)

Megfordítva, egy  $\{p_1, \dots, p_d\}$  szabályos  $d$ -politóp szimmetriacsoportja olyan Coxeter-csoport, melynek alaptartománya ortoszkéma. Ennek az ortoszkémának a csúcshalmaz a politóp laphálóján belül egy tetszőleges zászlóhoz rendelhető hozzá. Közelebbről, a  $k$ -adik ( $0 \leq k < d$ ) csúcs a zászlóban szereplő  $k$ -dimenziós lap középpontjával esik egybe.

Megjegyezzük még, hogy a





szabályos 4-politóp éleinek stabilizátora  $[p, q, r]$ -ben a  $\bullet \xrightarrow{p} \bullet = [p, 2]$  csoporttal, 2-lapjainak stabilizátora pedig a  $\bullet \xrightarrow{r} \bullet = [2, r]$  csoporttal izomorf.

A szabályos 4-politópokat, néhány adatukkal együtt, a 2.1. táblázatban soroljuk fel.

NÉV	SCHLÄFLI-SZIMBÓLUM	HIPERLAP	$f$ -VEKTOR
5-cella	$\{3, 3, 3\}$	tetraéder	$(5, 10, 10, 5)$
16-cella	$\{3, 3, 4\}$	tetraéder	$(8, 24, 32, 16)$
hiperkocka	$\{4, 3, 3\}$	kocka	$(16, 32, 24, 8)$
24-cella	$\{3, 4, 3\}$	oktaéder	$(24, 96, 96, 24)$
600-cella	$\{3, 3, 5\}$	tetraéder	$(120, 720, 1200, 600)$
120-cella	$\{5, 3, 3\}$	pentagondodekaéder	$(600, 1200, 720, 120)$

2.1. táblázat

2.8. Perfekt politópok

A perfekt politópok fogalmát Stewart Robertson vezette be 1980-as évek elején [72, 73]. Ez a 2.1. Definícióban megadott szimmetria-ekvivalencia fogalmán alapul, a következőképpen:

2.3. Definíció. A  $P$  politóp *perfekt*, ha minden  $P$ -vel szimmetria-ekvivalens politóp hasonló  $P$ -hez.

(A hasonlóság itt a szokásos geometriai értelemben veendő.)

Megjegyezzük, hogy Robertson a perfektség fogalmát tulajdonképpen a politópokhoz képest általánosabb objektumokra definiálta, nevezetesen, *konvex testekre*, amelyek az  $\mathbb{E}^d$  térnek kompakt konvex részhalmazai. Jelen keretek között azonban az ebbe az általánosabb kontextusba tartozó eredmények tárgyalását nem tekintjük feladatunknak.

A perfekt politóp fogalma a szabályos politóp fogalmának egy általánosítása, ugyanis érvényes a



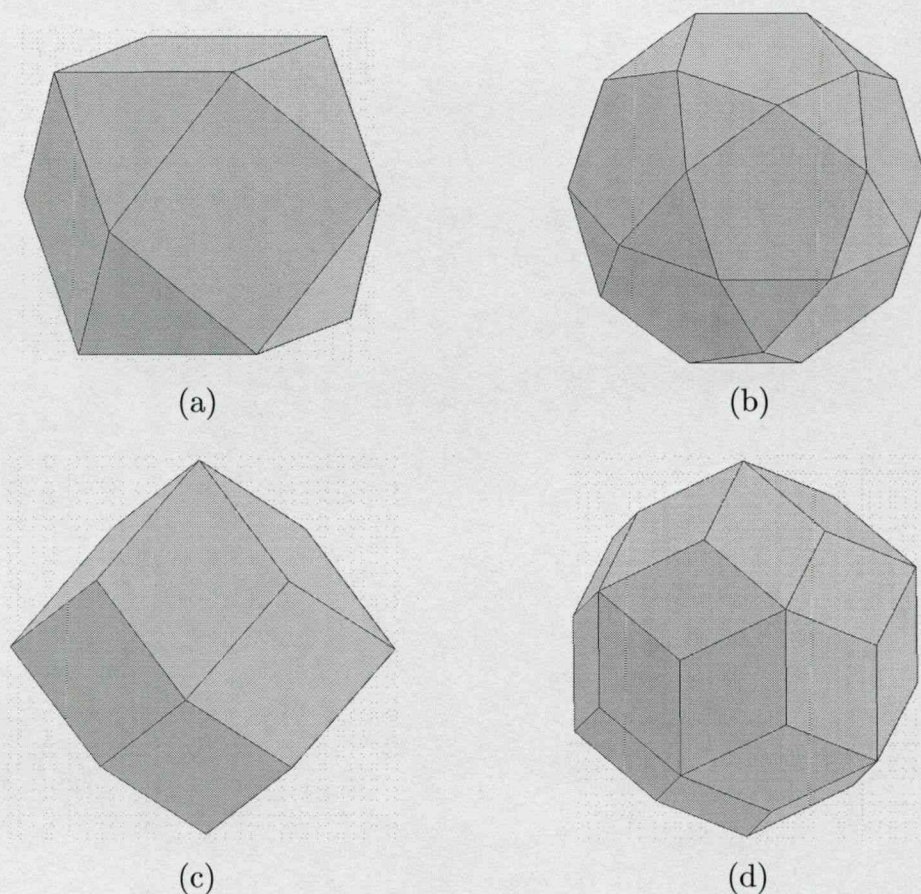


**2.4. Tétel.** ([73], 45. o.) *Minden szabályos politóp perfekt.*

Ezen túlmenően, egyfajta természetes általánosítás, amiről majd a következő, 3.1. alfejezetben, az „1. fajta perfekt 4-politópok” kapcsán közvetlenül is meggyőződhetünk.

Két dimenzióban a szabályos sokszögeken kívül nincs is más perfekt politóp. Három dimenzióban is ismerjük az összes perfekt politópokat:

**2.5. Tétel.** ([73], 100. o.) *A perfekt 3-politópoknak összesen 9 típusa létezik: az 5 szabályos poliéder, továbbá a kuboktaéder és ikozidodekaéder, valamint ezek polárisa, a rombdodekaéder, illetve rombikus triakontaéder.*



2.2. ábra

A nem-szabályos perfekt 3-politópok 4 típusát rendre a 2.2. (a), (b), (c), illetve (d) ábra szemlélteti. Megjegyezzük, hogy a kuboktaédert és az ikozidodekaédert

Coxeter is külön kategóriába tartozóként kezeli és *kvázi-szabályos* testeknek nevezi [13].

A perfekt politópokról egyelőre kevés általános ismeretünk van, hiszen még a perfekt 3-politópok típusainak megállapítása is a számba jöhető esetek egyenkénti vizsgálatán múlik. Az ilyen esetenkénti vizsgálatok köre jelentősen leszűkíthető a következő általános tétel alapján:

**2.6. Tétel.** ([71]) *Perfekt  $n$ -politóp szimmetriacsoportja irreducibilisen hat az  $\mathbb{E}^n$  téren.*

(Egy izometriacsoportról akkor mondjuk, hogy irreducibilisen hat az  $\mathbb{E}^n$  téren, ha nincs nemtriviális invariáns altere.)

Most szükségünk lesz az alábbi lemmára, ami Robertson egy kissé általánosabban megfogalmazott tételéből adódik ([73], 32. o.):

**2.7. Lemma.** *Ha egy 3-politóp éltranzitív, akkor egyúttal vagy csúcstranzitív, vagy laptranzitív.*

A 2.6. Tétel és a 2.7. Lemma következtében 18-ra szűkül azon 3-politópok szimmetriatípusainak száma, amelyek vizsgálata alapján – melynek részleteit most mellőzzük – a perfekt 3-politópok alábbi egyszerű karakterizációját nyerjük:

**2.8. Tétel.** *Egy 3-politóp akkor és csak akkor perfekt, ha éltranzitív.*

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény – sajnos – nem független a 2.5. Tételtől, mert a bizonyításban fel kell használnunk, hogy annak alapján már ismerjük a perfekt 3-politópok teljes körét.

Hasznos még számunkra a következő általános eredmény [59, 71]:

**2.9. Tétel.** *Ha a  $P$  politóp perfekt,  $P^*$  is perfekt, továbbá  $P$  bármely  $\square^r P = P \square \dots \square P$  hatványa perfekt. Másrészt, a  $P \square Q$  és  $P \diamond Q$  szorzat csak akkor perfekt, ha  $P$  és  $Q$  egybevágó és perfekt.*

A 2 és 3 dimenzió esetével ellentétben 4 dimenzióban egyáltalán nincs még teljes áttekintésünk a perfekt politópokról. Történt ugyan egy kísérlet T. Madden részéről a perfekt 4-politópok osztályozására [59]. Az idézett szerző ebben cikkében M. Rostami 1987-ből származó sejtését próbálta bizonyítani. A sejtést Madden [59], illetve Madden és Robertson [60] nyomán az alábbi megfogalmazásban idézzük:

**2.10. Rostami sejtése.** *Bármely perfekt 4-politóp vagy a polárisa megadható valamely  $Q$  szabályos sokszög  $Q \square Q$  alakú négyzeteként, vagy pedig előállítható olyan Wythoff-konstrukcióval, ahol a csoport egy  $W$  irreducibilis Coxeter-csoport, a kezdőpont pedig  $W$  alaptartományának valamely csúcsa.*

Látható, hogy a sejtés által megengedett perfekt 4-politópok mindegyike uniform (másképpen, a sejtésnek prím perfekt politópokra vonatkozó részével analóg állítás tetszőleges dimenzióban is megfogalmazható [60]). A perfekt politópok leírása ezért szorosan kapcsolódik az uniform politópok – Coxetertől származó – elméletéhez [12, 15, 17].

Madden bizonyításáról kiderült, hogy több ponton is hibás (Gévay, [35], p. 248, 251). A hibák elemzését a jelen dolgozatban nem tekintjük feladatunknak. Ehelyett azokat a politóposztályokat írjuk le, amelyek azt mutatják, hogy a perfekt 4-politópok köre jóval szélesebb annál, mint amit a sejtés megenged (Gévay, [35–37, 39]). Munkánk tehát ezen a ponton, a Rostami-sejtésből kiindulva csatlakozik a perfekt politópok témájához.

A következő fejezetekben szükségünk lesz az alábbi (a szerző [35] dolgozatában bevezetett) fogalmakra, illetve tételre.

**2.11. Definíció.** Legyen  $G$  az  $\mathbb{R}^d$  tér egy véges izometriacsoportja, és jelölje  $e$  a csoport egységelemét. A  $G$  csoport *szimmetriaállványzatán* az összes  $g \in G \setminus \{e\}$  transzformáció fixponthalmazának egyesítését értjük és scaf  $G$ -vel jelöljük:

$$\text{scaf } G = \bigcup_{g \in G \setminus \{e\}} \{x \in \mathbb{R}^d \mid gx = x\}.$$

(Ez a fogalom egy egyszerűsített változata az Engel által bevezetett hasonló fogalomnak, vö. [24], Definition 6.2.)

**2.12. Definíció.** Legyen  $G$  az  $\mathbb{R}^d$  tér egy rögzített véges izometriacsoportja és  $a \in \text{scaf } G$  egy pont. Az  $a$  pont *fixponthalmazán*, melyet  $\text{fix}_a$ -val jelölünk, a következő halmazt értjük:

$$\text{fix}_a = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) = x, \forall g \in G_a\},$$

ahol  $G_a$  az  $a$  pont stabilizátora  $G$ -ben. A  $\text{fix}_a$  halmaz dimenzióját az  $a$  pont ( $G$ -re vonatkozó) *szabadsági fokának* nevezzük.  $G$  szférikus szimmetriaállványzatának egy pontját *nódusnak* nevezzük, ha szabadsági foka nulla.

**2.13. Definíció.** Egy  $P$  politóp valamely  $V$  csúcsát *nodális csúcsnak* nevezzük, ha  $V$  a  $P$  szférikus képében egybeesik egy nódussal.  $P$ -t *nodális politópnak* nevezzük, ha minden csúcsa nodális.  $P$ -t *polárisan nodálisnak* nevezzük, ha  $P^*$  nodális.

**2.14. Tétel.** (Géray, [35]) *Minden csúcstranzitív nodális politóp perfekt.*

*Bizonyítás.* Legyen  $P$  egy csúcstranzitív nodális  $d$ -politóp és legyen  $Q$  egy  $P$ -től különböző, de ugyanahhoz a szimmetriatípushoz tartozó  $d$ -politóp. Ekkor van olyan  $\varphi$  izometria és  $\lambda$  hálózomorfizmus, hogy a 2.1. Definíció feltétele teljesül. Vegyük  $P$  egy tetszőleges  $V$  csúcsát.  $P$  és  $Q$  szimmetria-ekvivalenciájából közvetlenül adódik az alábbi két következmény:

- (1)  $\varphi G \varphi^{-1} = G_{\lambda(V)}$ , azaz  $P$  tetszőleges csúcsának  $G(P)$ -beli stabilizátorát  $\varphi$  a  $Q$  megfelelő csúcsának  $G(Q)$ -beli stabilizátorába transzformálja;
- (2)  $P$  csúcstranzitivitásából következik  $Q$  csúcstranzitivitása.

A második következmény miatt feltehetjük, hogy mind  $P$ , mind  $Q$  az  $\mathbb{S}^{d-1}$  egységgömbbe van írva. Másrészt, érvényes a következő egyenlőség:  $\varphi G_V \varphi^{-1} = G_{\varphi(V)}$ . Tehát  $G_{\lambda(V)} = G_{\varphi(V)}$ . De mivel  $P$  nodális,  $G(V)$ -nek pontosan 2 fix-pontja van az  $\mathbb{S}^{d-1}$  gömbön, melyek diametrálisan ellentett pontpárt képeznek. Ugyanez igaz a  $\varphi G \varphi^{-1}$  transzformáltra is. Ezért  $P$  minden  $V$  csúcsára  $\lambda(V) = \pm \varphi(V)$ . Feltehetjük, hogy  $P$  nem centrálszimmetrikus, mivel egyébként a bizonyítás kész volna ezzel az egyenlőséggel. Mármint ha  $Q$  minden  $\lambda(V)$  csúcsára pozitív előjellel érvényes az egyenlőség, akkor  $Q$  egybevágó  $P$ -vel, és a bizonyítás kész. Ugyanez érvényes, ha mindenütt negatív előjelet tételezzük fel. Megmutatjuk, hogy az előjelek nem fordulhatnak elő vegyesen.

Tételezzük fel az ellenkezőjét, legyen mondjuk  $\lambda(A) = \varphi(A)$  és  $\lambda(B) = -\varphi(B)$  érvényes  $P$  két különböző  $A$  és  $B$  csúcsára. Mivel az  $\mathbb{S}^{d-1}$  középpontjára vonatkozó tükrözés az ezt a gömböt önmagába transzformáló összes izometriával kommutál, a második egyenlőség  $\lambda(B) = \varphi(-B)$  alakban is írható. A tranzitivitás miatt van olyan  $g \in G(P)$ , hogy  $B = g(A)$ . A szimmetria-ekvivalencia alkalmazásával kapjuk, hogy  $\lambda(B) = \lambda(g(A)) = (\varphi G \varphi^{-1})(\lambda(A))$ .  $\lambda(A)$ -t és  $\lambda(B)$ -t helyettesítve kapjuk, hogy  $\varphi(-B) = (\varphi G \varphi^{-1})(\varphi(A))$ , amiből  $\varphi(-B) = \varphi(g(A))$ . Ezért  $-B = g(A)$ , amit a  $B = g(A)$  egyenlőséggel egybevetve a  $B = -B$  ellentmondáshoz jutunk. ■



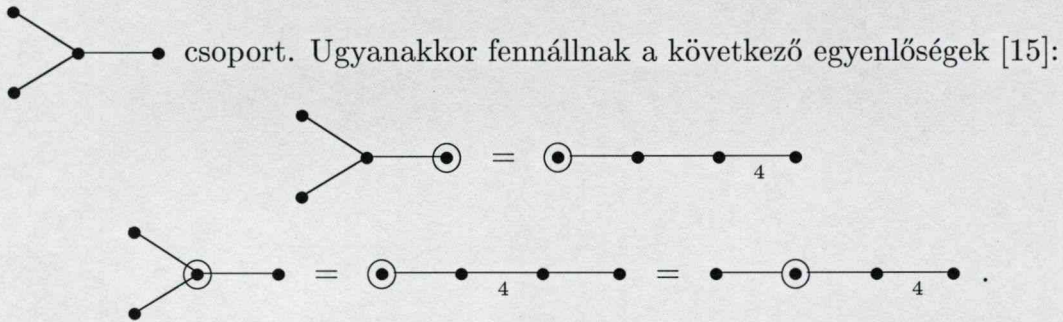
### 3. Wythoff-féle perfekt 4-politópok

#### 3.1. Első fajta perfekt Wythoff-politópok

A 2.10. Sejtésben szereplő prím Wythoff-politópokról a 2.14. Tétel alapján könnyen megmutatható, hogy perfektek. Valóban, a Coxeter-csoportok alaptulajdonságaiból adódik, hogy az alaptartomány bármely csúcsa nódus, és ebből már következik az állításunk. Célszerű az ilyen politópokra (tetszőleges  $d$  dimenzióban érvényes módon) egy külön elnevezést bevezetni (Gévay, [35]):

**3.1. Definíció.** Egy  $d$ -politópot *első fajta perfekt Wythoff-politóp*nak nevezünk, ha előállítható olyan Wythoff-konstrukcióval, amelyben a kezdőpont valamely Coxeter-csoport alaptartományának a csúcsa.

Világos, hogy minden szabályos politóp első fajta perfekt Wythoff-politóp. Négy dimenzióban a többi első fajta perfekt Wythoff-politóp is szoros kapcsolatban van a szabályos politópokkal, az alábbiak miatt. Az egyetlen 4-dimenziós Coxeter-csoport, amely nem szabályos politóp szimmetriacsoportja, a  $[3^1, 1, 1] =$



Mármost Coxeter a szabályos, illetve uniform politópokról szóló elméletében a 3.1. Definíció feltételét teljesítő  $d$ -politópokat, amennyiben a Wythoff-konstrukcióban alkalmazott Coxeter-csoport szabályos politóp szimmetriacsoportja, szabályos politópok *egyszerű csonkításainak* nevezi [13]. Az elnevezés arra utal, hogy az ilyen politópok előállíthatók szabályos  $d$ -politópokból a következő speciális csonkítási eljárással. Minden csúcsot úgy csonkítunk, hogy a csonkító hipersík átmegy a csúcsot tartalmazó összes  $k$ -dimenziós lap középpontján, ahol  $k$  valamely  $d$ -nél kisebb pozitív egész.

Mindezek alapján természetes módon adódik az következő



**3.2. Állítás.** *Egy 4-dimenziós első fajta perfekt Wythoff-politóp vagy szabályos politóp, vagy előáll szabályos politóp egyszerű csonkításaként.*

Az első fajta perfekt 4-politópok tehát jól ismertek, főleg Coxeter munkáiból (amelyek közül a legteljesebb leírás az [15] dolgozatban található), így ezek ismertetésére itt nem térünk ki. Ehelyett, a következő alfejezetben ezek polárisait írjuk le.

## 3.2. Kepler-politópok

A Kepler-politóp fogalmának bevezetését a szerző 1991-ben javasolta [31]. Az elnevezés alapja az, hogy az öt szabályos 3-politóp, valamint a Kepler által felfedezett rombdodekaéder és rombikus triakontaéder együttesen karakterizálható az alábbi két tulajdonsággal:

- (K 1) szimmetriacsoportja megegyezik egy szabályos politóp szimmetriacsoportjával és tranzitív a hiperlapokon;
- (K 2) perfekt.

Megjegyezzük, hogy Kepler osztályozási rendszerében a 3-politópoknak ez a hét típusa a „legtökéletesebb poliéderek” osztályát alkotja [20]. (Másképpen, a [31] dolgozatban a perfekt politópok fogalma még nem jelenik meg, a (K 2) feltétel egy ettől független ekvivalens alakban van megfogalmazva.)

**3.3. Definíció.** Egy  $d$ -politópot *Kepler-politópnak* nevezünk, ha teljesül rá a (K 1) és (K 2) feltétel.

Világos, hogy a Kepler-politópok négy dimenzióban egybeesnek az első fajta perfekt Wythoff-politópok polárisaival. Mivel a nem-szabályos Kepler-politópok uniform ellenpárjaikhoz képest jóval kevésbé ismertek, és a későbbi fejezetekben szükségünk is lesz rájuk, vázlatosan ismertetünk néhány rájuk vonatkozó (elsősorban az [31] dolgozathoz származó) eredményt.

Tekintsük a következő konstrukciót. Legyen  $W$  egy  $d$ -dimenziós irreducibilis Coxeter-csoport  $D$  alaptartománnyal, és vegyük az ehhez tartozó  $\mathcal{T} = W(D)$  fundamentális tesszelációt az  $\mathbb{S}^{d-1}$  gömbön. Válasszunk egy  $p \in D$  pontot és képezzük mindazon tartományok egyesítését, amelyek tartalmazzák ezt a pontot. Végezzük ugyanezt el  $p$  minden egyes transzformáltjára nézve. A Coxeter-csoportok alaptulajdonságaiból következik, hogy ekkor ismét egy tesszelációt

kapunk, amelyet  $\mathcal{T}_p$ -vel jelölünk, és  $\mathcal{T}$  faktortesszelációjának nevezünk [31]. A  $p$  pontot a *faktorizáció alappontjának* nevezzük.

Például a 2.1. ábrán egy 30 darab gömbi rombuszból álló faktortesszelációt kapunk, ha a háromszögeket a derékszögű csúcsaik körül négyesével egyesítjük. Világos, hogy ez a tesszeláció éppen egy rombikus triakontaéder gömbi képe. Sőt, bizonyítható, hogy a fenti módon előállított tetszőleges faktortesszeláció is egy alkalmas politóp gömbi képe, és így adódik a következő

**3.2.1. KONSTRUKCIÓ.** Rekonstruáljuk a  $P$  politópot a gömbi képéből, amelyet a fent ismertetett faktortesszeláció formájában állítottunk elő.

A rekonstrukció a következőképpen hajtható végre. Illesszünk egy érintő hipersíkot az  $S^{d-1}$  gömbhöz minden egyes  $v(p)$ ,  $v \in W$  pontban. Vegyük minden egyes hipersík esetén az általa határolt és a gömböt tartalmazó zárt félteret. Megmutatható, hogy e félterek metszete éppen a keresett  $P$  politóp.

Világos, hogy a  $P$  politóp hiperlap-tranzitív, továbbá szimmetriatípusát (rögzített  $W$  esetén) egyértelműen meghatározza  $p$  helyzete. Ez utóbbira vonatkozóan  $2^d - 1$  különböző lehetőségünk van, attól függően, hogy a  $D$  alapszimplex mely lapjának relatív belsejéből választottuk a  $p$  pontot. Szintén közvetlenül adódik a Coxeter-csoportok alaptulajdonságaiból, hogy  $p$  (2.12. Definíció szerinti) szabadsági foka a gömbi képben megegyezik  $D$  azon lapjának dimenziójával, amely őt a relatív belsejében tartalmazza.

Speciálisan, ha  $p$  a  $D$  egy csúcsával esik egybe, ez a szabadsági fok 0, tehát  $p$  nodust képez. A  $\text{conv } W(p)$  politóp ekkor nodális Wythoff-politóp, és ezért a 2.14. Tétel értelmében perfekt.  $P$  ennek a Wythoff-politópnak a polárisa, mint az a gömbi képből történő fenti rekonstrukció alapján közvetlenül látható.  $P$  tehát ebben az esetben szintén perfekt.

A Rostami-sejtés által megengedett csúcstranzitív, illetve hiperlap-tranzitív perfekt politópok előállítására tehát két független konstrukció áll rendelkezésünkre (a függetlenséget abban az értelemben véve, hogy egyiknek a definíciójában sem hivatkozunk a másikra). Ezen túlmenően azonban fennáll egy szoros kapcsolat közöttük, minthogy egymással poláris viszonyban álló politópokat szolgáltatnak (nem-nulla szabadsági fokú esetben ez a kapcsolat – kombinatorikus értelemben vett – dualitássá gyengül).

Ezt a kapcsolatot a faktortesszelációs eljárással kapott politópok jelölésében is kifejezésre juttatjuk, a következőképpen. Ha a faktorizáció alappontja a  $D$  szimplex  $i$ -edik csúcsa, akkor a megfelelő Coxeter-gráfban az  $i$ -edik generátort reprezentáló pontot egy függőleges vonással látjuk el. Az előbbi példánkban szereplő rombikus triakontaéder szimbóluma ekkor:



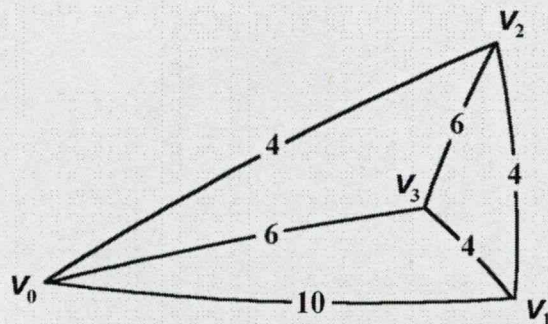
A poláris viszonyból adódóan az a szabály érvényes, hogy a  $P$  politóp ilyen módon megadott szimbólumának éppen azon pontja van ellátva a vonással, amelyik a  $P^*$  poláris megfelelő Coxeter-szimbólumában a karikát viseli. Példánkban ez az ikozidodekaéder szimbóluma:



Általánosabban, ha a  $p$  alappont egy  $k$ -dimenziós  $F_J$  lap ( $0 < k < n$ ) relatív belsejében van, akkor minden  $j \in J$ -re a Coxeter-gráf  $j$ -edik pontját ellátjuk egy vonással (vö. 2.6. alfejezet).

Ez a szimbólum (a Wythoff-politópok esetéhez hasonlóan) itt is több, mint pusztán jelölés. Megadható ugyanis egy algoritmus, amely ebből a szimbólumból kiindulva és a Coxeter-gráf bizonyos részgráfjain végighaladva, a  $P$  politóp teljes kombinatorikus leírását szolgáltatja [31]. Erre itt nem térünk ki, mivel esetünkben az  $S^3$  gömbön állítjuk elő a faktortesszelációt. Ez lehetőséget ad arra, hogy közvetlenül, szemléletes képben dolgozva állapítsuk meg a szimplextartományok egyesítésekor keletkező alakzatok kombinatorikus, illetve szimmetriatípusát. (Megemlítjük azonban, hogy az absztrakt eljárás hatékonyságát demonstrálandó, meghatároztuk és a [31] dolgozatban példaként közöltük a 7-dimenziós  $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$  politóp  $f$ -vektorát; erről a Math. Reviews-ban közölt referátumában Coxeter is kedvezően nyilatkozik [19].)

Példaként tekintsük most a  $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$  politóp előállítását. A faktorizáció alappontja ekkor a 14 400-adrendű  $H_4 = \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$  csoport alaptartományának 1. számú csúcsa. A 3.1. ábra ezt az alaptartományt – amely egy gömbi tetraéder – mutatja vázlatosan. Az élekre írott számok azt jelzik, hogy az adott élben hány ilyen tetraéder találkozik (ezt a számot az él *fokának* fogjuk nevezni).



3.1. ábra



Az alappontnak választott csúcs stabilizátora az  $A_1 \times I_2^5$  csoporttal izomorf  $\bullet \text{---} \underset{5}{\bullet} \text{---} \bullet$  csoport, amely 20-adrendű. Ebben a csúcsban ezért 20 tetraéder-tartomány található. Ezek egyesítésekor a  $V_1$  csúcsot tartalmazó lapok az új tartomány belsejébe kerülnek. A tartomány határát a  $V_0 V_2 V_3$  lap és a vele ekvivalens lapok fogják alkotni. Ezek a lapok a 4-edfokú élek mentén – ahol a diéderes szög  $90^\circ$  – kettésével egyesülve egy-egy egyenlő szárú háromszög lapot fognak képezni. A 6-odfokú élek megmaradnak (és ezek közül a  $V_2 V_3$ , illetve ezzel ekvivalens élek kettésével egy-egy új élt képeznek). A 4-odfokú  $V_0 V_2$ , ill. ezzel ekvivalens élek pedig az új lapok szimmetriatengelyei lesznek. Az új tartományt tehát 10 egyenlő szárú háromszög határolja, és szimmetriacsoportja a  $D_{5h} \cong A_1 \times I_2^5$  csoport. Mindebből látható, hogy a keletkezett tartomány nem más, mint egy pentagonális dipiramis (megjegyezzük, hogy a – Schoenflies által –  $D_{nh}$  szimbólummal jelölt csoportok éppen az  $n$ -gonális dipiramisok szimmetriacsoportjai).

A faktortesszeláció tehát ilyen gömbi dipiramisokból áll, amelyek a politóp rekonstrukciója során – stabilizátorukat megőrizve – euklideszi pentagonális dipiramisokba mennek át. A kapott politópnak összesen  $14\,400 : 20 = 720$  ilyen hiperlapja lesz. Könnyen meghatározhatjuk a politóp teljes  $f$ -vektorát is, ami  $(720, 3600, 3600, 720)$ .

Hasonló módon, esetről-esetre megmutatható, hogy érvényes a következő

**3.4. Állítás.** Minden 4-dimenziós nem-szabályos Kepler-politóp dipiramidális, azaz hiperlapjai dipiramisok. Orbit vektoruk pedig:  $(2, 2, 1, 1)$ .

Közelebbi vizsgálat – melynek részleteit mellőzzük és csak az eredményeit foglaljuk össze az alábbi állításban, illetve táblázatban – azt mutatja, hogy ezek a dipiramidális politópok (természetes módon) szoros kapcsolatban állnak egy-egy alkalmas szabályos 4-politóppal. (Ezeket az eredményeket a későbbiekben még hasznosítani fogjuk.) Bevezetünk politópjainkra egy a fenténél tömörebb jelölést is, melynek általános alakja:  $f_i X_4$ , ahol  $X_4$  a konstrukcióban szereplő Coxeter-csoport,  $i$  pedig azt mutatja, hogy a faktorizáció alappontja az alaptartomány hányas számú csúcsával esik egybe. Általánosabban, ha az alappont a  $W$  Coxeter-csoport alaptartománya valamely  $F_J$  lapjának relatív belsejében van, akkor a megfelelő szimbólum  $f_{i_1, i_2, \dots, i_j} W$ , ahol az  $i_1, i_2, \dots, i_j \in J$  számok az illető lap csúcsait indexelik.

**3.5. Állítás.** (Gévy, [37]) Ha  $P$  egy 4-dimenziós dipiramidális Kepler-politóp, akkor van olyan  $R = \{p, q, r\}$  szabályos politóp, hogy a következő feltételek teljesülnek:

- (a) létezik egy bijektív megfeleltetés  $P$  hiperlapjainak halmaza és  $R$  éleinek halmaza között;

- (b)  $P$  egy  $F$  hiperlapjának súlypontja egybeesik  $R$  megfelelő  $E$  élének közép-pontjával;
- (c) a gömbi képen  $F$  apikális csúcsai egybeesnek  $E$  végpontjaival;
- (d) a gömbi képen  $F$  minden báziscsúcsa  $R$  egy olyan hiperlapjának súlypont-jával esik egybe, amelynek  $E$  egy éle;
- (e)  $F$  stabilizátora  $G(P)$ -ben izomorf a  $[2, r]$  Coxeter-csoporttal ( $r = 3, 4$  or  $5$ ).

JEL	HIPERLAPOK	$f$ -VEKTOR	$R$
$f_1A_4 = f_2A_4$	trigonális dipiramisok	(10, 30, 30, 10)	{3, 3, 3}
$f_1B_4 = \{3, 4, 3\}$	szabályos oktaéderek	(24, 96, 96, 24)	{3, 3, 4}
$f_2B_4$	trigonális dipiramisok	(24, 88, 96, 32)	{4, 3, 3}
$f_1F_4 = f_2F_4$	trigonális dipiramisok	(48, 240, 288, 96)	{3, 4, 3}
$f_1H_4$	pentagonális dipiramisok	(720, 3600, 3600, 720)	{3, 3, 5}
$f_2H_4$	trigonális dipiramisok	(720, 3120, 3600, 1200)	{5, 3, 3}

3.1. táblázat

Végezetül, az alábbi állítás, amely a Wythoff-konstrukció és a faktortesz-szelációs eljárás egybevetése alapján egyszerűen belátható, azt mutatja, hogy a kétféle konstrukcióval kapott politópok között szoros kapcsolat van.

**3.6. Állítás.** *Adott Coxeter-csoport esetén, ha a Wythoff-konstrukció kezdő-pontja és a faktortesszelációs eljárás alappontja ugyanaz a pont, akkor a kétféle eljárással előállított egyik, illetve másik politóp egymás polárisa.*

### 3.3. Második fajta perfekt Wythoff-politópok

Ebben az alfejezetben olyan perfekt Wythoff-politópokat konstruálunk, amelyek, bár fogalmilag még meglehetősen közel állnak a Rostami-sejtés által megengedett politópokhoz, valójában már ellenpéldákat képviselnek (Gévay, [35]).

**3.7. Definíció.** Egy perfekt Wythoff-politópot *második fajta perfekt Wythoff-politóp*nak nevezünk, ha nem első fajta, de előállítható olyan Wythoff-konstrukcióval, melyben a kezdőpont egy Coxeter-csoport alaptartománya valamely lapjának relatív belső pontja.

Induljunk ki a  $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet = [3, 3, 3]$  csoportból. Látható, hogy a csoport Coxeter-gráfja rendelkezik egy másodrendű automorfizmussal. Ennek a szimmetriának a geometriai háttere a következő. Tekintsük a  $[3, 3, 3]$  csoport szokásos prezentációját. A definiáló relációk:

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1, \\ (\sigma_0 \sigma_1)^3 = (\sigma_1 \sigma_2)^3 = (\sigma_2 \sigma_3)^3 = (\sigma_0 \sigma_2)^2 = (\sigma_0 \sigma_3)^2 = (\sigma_1 \sigma_3)^2 = 1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ahol  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  a generátor tükrözéseket jelöli. Ez a prezentáció nyilvánvalóan invariáns a  $\rho = (\sigma_0, \sigma_3)(\sigma_1, \sigma_2)$  permutációval szemben. Így ez a permutáció az  $A_4$  csoport egy (külső) automorfizmusát indukálja. Vegyük most a csoport  $D$  alaptartományát, ami egy gömbi tetraéder. A  $\rho$  kombinatorikus szimmetria geometriai realizációja azt jelenti, hogy  $D$  szimmetrikus egy olyan félfordulatra nézve, amely két szemközti élének felezőpontját összekötő (gömbi) egyenes körül történik. Ezek az élek  $V_0V_3$  és  $V_1V_2$ , ahol  $V_i$  – korábbi megállapodásunkkal összhangban – a  $D$  tetraédernek az  $i$ -edik generátor tükrözésnek megfelelő falal szemközti csúcsát jelenti. Jelölje tehát  $M_{03}$ , illetve  $M_{12}$  a megfelelő felezőpontokat.

A fentiekből következik, hogy az  $M_{03}$ , illetve  $M_{12}$  pontot Wythoff-konstrukció kezdőpontjának választva, uniform politópot kapunk [15]. Coxeter jelölését használva, ez rendre a következő két politópot jelenti:

$$\begin{aligned} t_{1,2} \alpha_4 &= \bullet \text{---} \odot \text{---} \odot \text{---} \bullet, \quad \text{illetve} \\ t_{0,3} \alpha_4 &= \odot \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \odot. \end{aligned}$$

A kezdőpont helyzetéből következik, hogy a konstrukció megőrzi az imént leírt többszimmetriát. A két politóp szimmetriacsoportja tehát a  $[3, 3, 3]$  csoportból a tekintett félfordulattal való bővítés révén áll elő. Coxeter jelölésében ez a  $[[3, 3, 3]]$  csoport. Világos, hogy  $[[3, 3, 3]]$  izomorf a  $[3, 3, 3] \rtimes \langle \rho \rangle$  szemidirekt szorzattal, ahol  $\langle \rho \rangle$  a  $\rho$  által generált másodrendű csoportot jelöli. A csoport rendje  $120 \cdot 2 = 240$ .

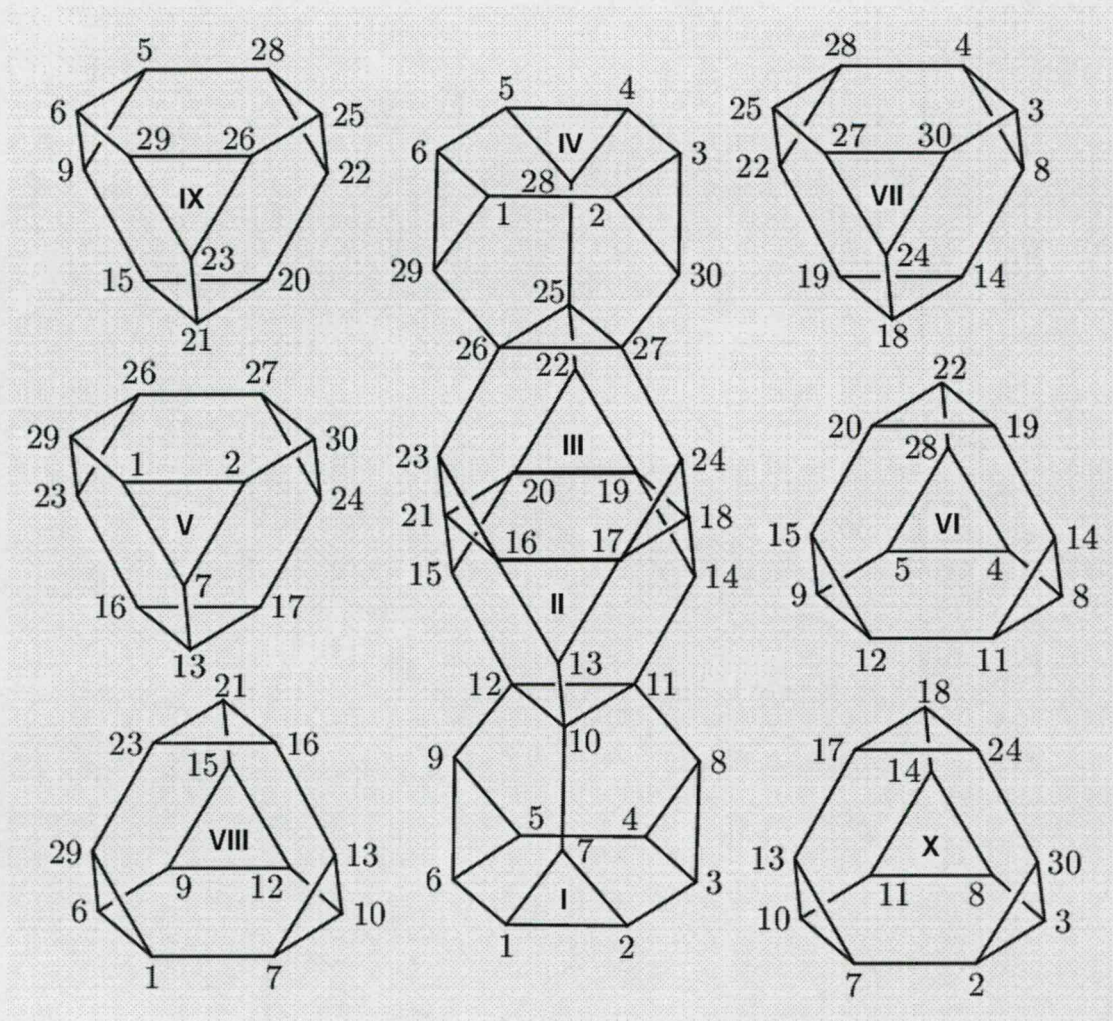
Ennek a bővebb csoportnak a szimmetriaállványzatában az  $M_{03}$ , illetve  $M_{12}$  pont egyaránt nódust képez. Így a 2.14. Tételből következik, hogy mindkét politópunk perfekt.

A  $t_{1,2} \alpha_4$  politópról kissé részletesebb leírást adunk, amire a későbbiekben szükségünk is lesz. A Wythoff-konstrukció alapján megállapíthatjuk, hogy öt  $\bullet \text{---} \odot \text{---} \odot \text{---} \bullet$  és öt  $\odot \text{---} \odot \text{---} \bullet \text{---} \odot$  hiperlapja van, tehát összesen tíz egybevágó arkhimédeszi csonkított tetraéder határolja. Ez tehát egy uniform 10-cella, ezért jelölésére az  $X$  szimbólumot fogjuk használni. Szerkezete a 3.2. ábrán látható (ahol az azonos számok azonos csúcsokat jelölnek). A csúcsok koordinátái



különösen egyszerű alakot öltenek egy  $\mathbb{R}^5$  térben való alkalmas elhelyezés esetén [15]. Az egyes csúcsokhoz rendelt koordináták a 3.2. táblázatban találhatók.

Az ábrából is látszik, hogy  $X$  felfogható úgy, mint a szabályos 5-cella alkalmas csonkítása (a csúcsokon), illetve, ekvivalens módon, mint két egybevágó, egymással poláris, szabályos 5-cella metszete. Ez utóbbi felfogásban a két egymással poláris példány centrálszimmetrikus helyzetű. Ebben az értelemben tehát  $X$  az oktaéder 4-dimenziós analogonjának is tekinthető. Megjegyezzük, hogy a fent említett, az alaptartományt önmagába vivő félfordulat (ill. ennek összes konjugáltja) szintén egymásba transzformálja a két poláris szimplexpéldányt.



3.2 ábra

$v_1(1, 1, 0, \bar{1}, \bar{1})$	$v_9(0, 1, \bar{1}, 1, \bar{1})$	$v_{17}(\bar{1}, 0, 1, \bar{1}, 1)$	$v_{25}(1, \bar{1}, \bar{1}, 0, 1)$
$v_2(1, 0, 1, \bar{1}, \bar{1})$	$v_{10}(\bar{1}, 1, 1, 0, \bar{1})$	$v_{18}(\bar{1}, \bar{1}, 1, 0, 1)$	$v_{26}(1, 0, \bar{1}, \bar{1}, 1)$
$v_3(1, \bar{1}, 1, 0, \bar{1})$	$v_{11}(\bar{1}, 0, 1, 1, \bar{1})$	$v_{19}(\bar{1}, \bar{1}, 0, 1, 1)$	$v_{27}(1, \bar{1}, 0, \bar{1}, 1)$
$v_4(1, \bar{1}, 0, 1, \bar{1})$	$v_{12}(\bar{1}, 1, 0, 1, \bar{1})$	$v_{20}(\bar{1}, 0, \bar{1}, 1, 1)$	$v_{28}(1, \bar{1}, \bar{1}, 1, 0)$
$v_5(1, 0, \bar{1}, 1, \bar{1})$	$v_{13}(\bar{1}, 1, 1, \bar{1}, 0)$	$v_{21}(\bar{1}, 1, \bar{1}, 0, 1)$	$v_{29}(1, 1, \bar{1}, \bar{1}, 0)$
$v_6(1, 1, \bar{1}, 0, \bar{1})$	$v_{14}(\bar{1}, \bar{1}, 1, 1, 0)$	$v_{22}(0, \bar{1}, \bar{1}, 1, 1)$	$v_{30}(1, \bar{1}, 1, \bar{1}, 0)$
$v_7(0, 1, 1, \bar{1}, \bar{1})$	$v_{15}(\bar{1}, 1, \bar{1}, 1, 0)$	$v_{23}(0, 1, \bar{1}, \bar{1}, 1)$	
$v_8(0, \bar{1}, 1, 1, \bar{1})$	$v_{16}(\bar{1}, 1, 0, \bar{1}, 1)$	$v_{24}(0, \bar{1}, 1, \bar{1}, 1)$	

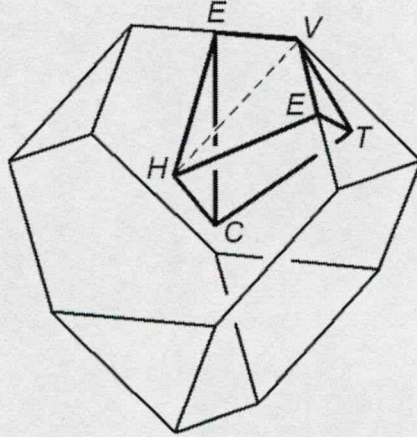
### 3.2. Táblázat

Az  $X$  politóp ismeretében a  $[[3, 3, 3]]$  csoportot elő tudjuk állítani egy másik szemidirekt szorzat formájában. Ennek segítségével teljesebb képet kaphatunk a csoport szimmetriaállványzatáról és alaptartományáról [39]. Ennek következményeit a 4.3. alfejezetben, illetve az 5. fejezetben fogjuk hasznosítani.

Legyen  $\pi$  egy olyan szimmetriaművelet, amely ciklikusan permutálja egy szabályos 4-szimplex csúcsait (illetve, ami ezzel ekvivalens, a szimplex hiperlapjait). Jelölje  $\gamma$  az origóra vonatkozó tükrözést. Ekkor a  $\delta = \pi\gamma$  transzformáció  $\pi$  „négyzetgyöke”, tehát egy 10-edrendű szimmetriaművelet. Ez ciklikusan permutálja az  $X$  politóp hiperlapjait (összhangban azzal, hogy  $X$ -et a szabályos szimplex csúcsainak csonkításával előállított politópnak tekintjük). Ennek megfelelően, a gömbi képben tekintve,  $X$  bármely hiperlapja a  $\langle\delta\rangle$  ciklikus csoport egy alaptartományát képezi. Másrészt, egy ilyen hiperlap szimmetriacsoportja nem más, mint  $[3, 3] \cong S_4$ . Ez a csoport izomorf  $\langle\delta\rangle$  külső automorfizmusainak egy csoportjával, mégpedig a következő algebrai tény miatt. A  $\langle\delta\rangle \cong C_{10}$  csoportban a  $\delta, \delta^3, \delta^7, \delta^9$  elemek egy generátorhalmazt képeznek. Az  $S_4$  szimmetrikus csoport hatása ezen a halmazon egy csoporthatást indukál a  $C_{10}$  csoporton, vagyis  $S_4$  külső automorfizmus-csoportként hat  $C_{10}$ -en. Geometriailag tekintve, ez annak felel meg, hogy a hiperlap felbontható 24 egybevágó tartományra, amelyek bármelyike a  $[[3, 3, 3]]$  csoport egy alaptartományának tekinthető. Ebből következik, hogy létezik a következő szemidirekt felbontás:  $[[3, 3, 3]] \cong \langle\delta\rangle \rtimes [3, 3]$ .

Az említett geometriai felbontásban szereplő tartomány alakját a 3.3. ábra szemlélteti (a gömbi képről az euklideszi ösképre visszatérve). A szaggatott vonallal jelölt  $VH$  szakasz az  $M_{03}M_{12}$  szakaszt ábrázolja (a végpontok átjelölése egy később tárgyalandó konstrukció kedvéért történt). A  $[[3, 3, 3]]$  csoport alaptartománya tehát egy fél  $V_0V_1V_2V_3$  tetraéder, összhangban azzal, hogy ennek a csoportnak a rendje kétszerese a  $[3, 3, 3]$  csoport rendjének.





3.3. ábra

A  $[[3, 3, 3]]$  szimmetriaállványzatában a nódusoknak 4 tranzitivitási osztályát találjuk. Ezeket az  $X$  politóp bizonyos speciális helyzetű pontjai képezik.  $E$  pontok  $[[3, 3, 3]]$ -beli stabilizátorai a  $[3, 3, 3]$  csoport szerkezetének ismeretében könnyen meghatározhatók. A 4 ponttípus a következő:

- $V$  típus:  $X$  csúcsai, melyek stabilizátora a  $[4, 2^+] \cong D_{2d}$  csoporttal izomorf;
- $T$  típus: a háromszöglapok középpontjai, melyek stabilizátora a  $[3, 2] \cong D_{3h}$  csoporttal izomorf;
- $H$  típus: a hatszöglapok középpontjai, melyek stabilizátora a  $[6, 2^+] \cong D_{3d}$  csoporttal izomorf;
- $C$  típus: a cellák súlypontjai, melyek stabilizátora a  $[3, 3] \cong T_d$  csoporttal izomorf.

A 3.3. ábra ezeknek típusoknak a reprezentánsait is szemlélteti. Megjegyezzük, hogy az ábrán  $C$ -vel jelölt pont a  $D$  alaptartomány  $V_0$  csúcsával esik egybe, a  $T$ -vel jelölt pont pedig a  $V_1$  csúccsal. Az ábrán egy ötödik,  $E$ -vel jelölt ponttípust is szemléltetünk (ez az élközéppontok tranzitivitási osztálya), amelynek pontjai ugyan nem nódusok, a későbbiek során azonban dolgozni fogunk velük.

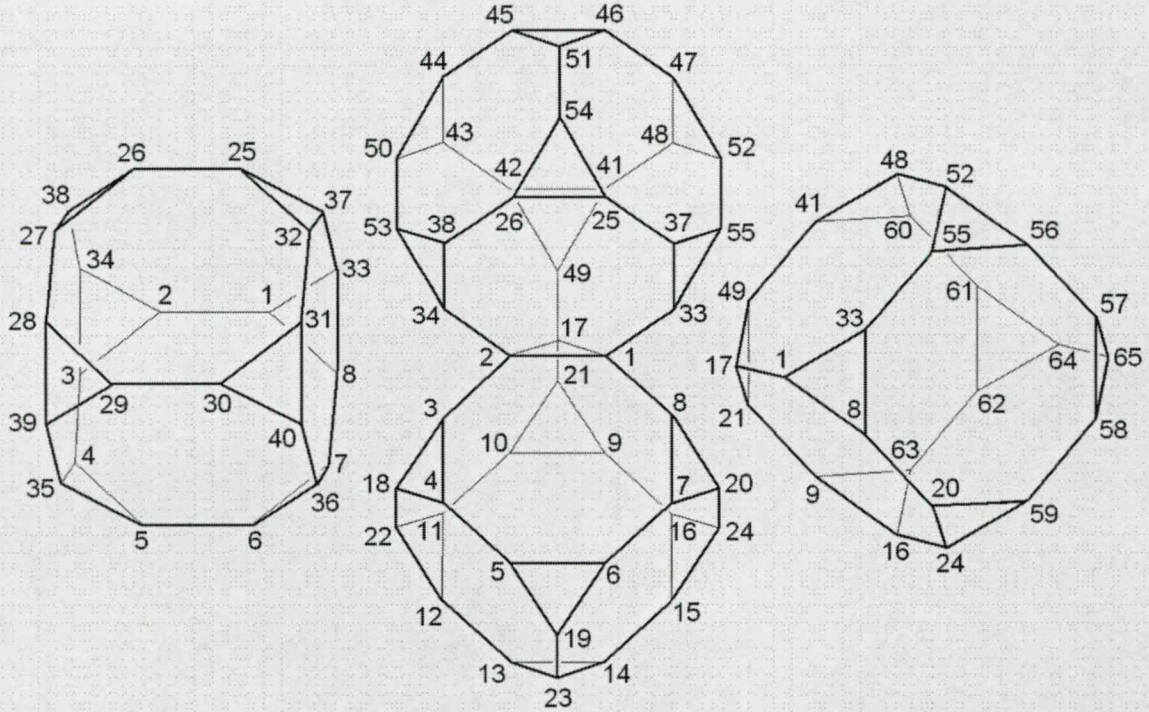
A  $[3, 3, 3]$  csoportra vonatkozó fenti megfontolásaink közvetlenül átvihetők a  $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet = [3, 4, 3]$  csoportra. Analóg módon ekkor a következő csoportot kapjuk:  $[[3, 4, 3]] \cong [3, 4, 3] \rtimes \langle \rho \rangle$ . A megfelelő két Wythoff-politóp:

$$\begin{aligned} t_{1,2}\{3, 4, 3\} &= \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet , \\ t_{0,3}\{3, 4, 3\} &= \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc . \end{aligned}$$

Ugyanúgy, mint az előbb, ezek nemcsak uniform, hanem perfekt politópok is.



Az  $X$  perfekt 10-cellával analóg  $t_{1,2}\{3,4,3\}$  politópnak 24  $\odot \text{---} \odot \text{---} \bullet$  és 24  $\bullet \text{---} \odot \text{---} \odot$  hiperlapja van, tehát összesen 48 arkhimédeszi csomópontot határolja. A szerkezet egy jellemző részlete a 3.4. ábrán látható. A szoros analógia miatt ezt a politópot az  $Y$  szimbólummal fogjuk jelölni.



3.4. ábra

Az analógia abban is megnyilvánul, hogy ez a politóp szintén felfogható úgy, mint két egybevágó, egymással poláris, szabályos 24-cella metszete. Eltérés van azonban abban, hogy a két poláris példány centrális tükrözéssel ezúttal nem vihető át egymásba, hiszen a 24-cella önmaga centrálszimmetrikus. Így tehát csak a  $[3,4,3]$  csoport alaptartományának másodrendű forgatása – ill. annak konjugáltjai – tudják ezt megvalósítani.

A 288 csúcs koordinátái a következőképpen adhatók meg:

$$(\pm(1+\sqrt{2}), \pm(-1+\sqrt{2}), \pm 1, \pm 1)^P, \quad (\pm 2, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0)^P,$$

ahol  $P$  a koordináták összes permutációját jelenti. Szükségünk lesz néhány konkrét koordináta ismeretére is, ezért az ábrán szereplő csúcsok esetében meghatároztuk azokat [39]. Az eredményeket a 3.3. táblázat tartalmazza.

---



---

$v_1(1+\sqrt{2}, 1, 1, -1+\sqrt{2})$	$v_{34}(2, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$
$v_2(1+\sqrt{2}, 1, -1+\sqrt{2}, 1)$	$v_{35}(2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$
$v_3(1+\sqrt{2}, 1, 1-\sqrt{2}, 1)$	$v_{36}(2, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$
$v_4(1+\sqrt{2}, 1, -1, -1+\sqrt{2})$	$v_{37}(\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 0)$
$v_5(1+\sqrt{2}, 1, -1, 1-\sqrt{2})$	$v_{38}(\sqrt{2}, 2, 0, \sqrt{2})$
$v_6(1+\sqrt{2}, 1, 1-\sqrt{2}, -1)$	$v_{39}(\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2}, 0)$
$v_7(1+\sqrt{2}, 1, -1+\sqrt{2}, -1)$	$v_{40}(\sqrt{2}, 2, 0, -\sqrt{2})$
$v_8(1+\sqrt{2}, 1, 1, 1-\sqrt{2})$	$v_{41}(\sqrt{2}, 0, 2, \sqrt{2})$
$v_9(1+\sqrt{2}, -1, 1, -1+\sqrt{2})$	$v_{42}(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2)$
$v_{10}(1+\sqrt{2}, -1, -1+\sqrt{2}, 1)$	$v_{43}(1, -1+\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2})$
$v_{11}(1+\sqrt{2}, -1, 1-\sqrt{2}, 1)$	$v_{44}(-1+\sqrt{2}, 1, 1, 1+\sqrt{2})$
$v_{12}(1+\sqrt{2}, -1, -1, -1+\sqrt{2})$	$v_{45}(0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$
$v_{13}(1+\sqrt{2}, -1, -1, 1-\sqrt{2})$	$v_{46}(0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$
$v_{14}(1+\sqrt{2}, -1, 1-\sqrt{2}, -1)$	$v_{47}(-1+\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}, 1)$
$v_{15}(1+\sqrt{2}, -1, -1+\sqrt{2}, -1)$	$v_{48}(1, -1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1)$
$v_{16}(1+\sqrt{2}, -1, 1, 1-\sqrt{2})$	$v_{49}(2, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$
$v_{17}(1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 1, 1, )$	$v_{50}(1, 1, -1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$
$v_{18}(1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, -1, 1, )$	$v_{51}(0, 2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$
$v_{19}(1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, -1, -1)$	$v_{52}(1, 1, 1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$
$v_{20}(1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 1, -1)$	$v_{53}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 2)$
$v_{21}(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1, 1)$	$v_{54}(-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1, 1)$
$v_{22}(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, -1, 1)$	$v_{55}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2, 0)$
$v_{23}(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, -1, -1)$	$v_{56}(1, 1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$
$v_{24}(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1, -1)$	$v_{57}(1, -1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, -1)$
$v_{25}(1, 1+\sqrt{2}, 1, -1+\sqrt{2})$	$v_{58}(\sqrt{2}, 0, 2, -\sqrt{2})$
$v_{26}(1, 1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 1)$	$v_{59}(2, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$
$v_{27}(1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1)$	$v_{60}(1, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1)$
$v_{28}(1, 1+\sqrt{2}, -1, -1+\sqrt{2})$	$v_{61}(1, -1, 1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$
$v_{29}(1, 1+\sqrt{2}, -1, 1-\sqrt{2})$	$v_{62}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2, 0)$
$v_{30}(1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, -1)$	$v_{63}(2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$
$v_{31}(1, 1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, -1)$	$v_{64}(1, -1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$
$v_{32}(1, 1+\sqrt{2}, 1, 1-\sqrt{2})$	$v_{65}(1, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, -1)$
$v_{33}(2, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$	

---



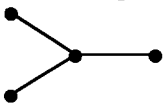
---

3.3. táblázat

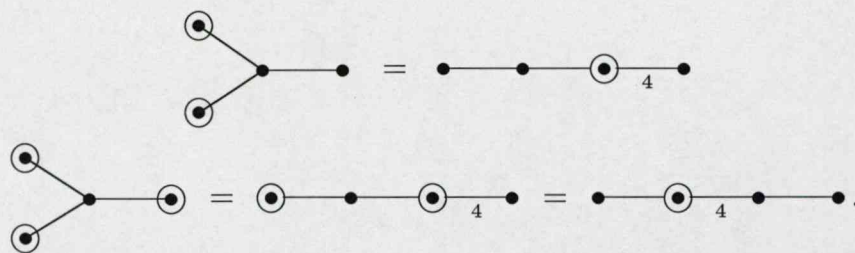
Rendelkezésünkre áll tehát politópoknak összesen 4 olyan típusa, amelyek uniform politópként ugyan ismertek [15], perfekt politópként azonban egy olyan új osztályt képeznek, amelyről a 2.10. Sejtés nem ad számot [35]. A 4-dimenziós Coxeter-csoportok ismeretében egyszerű megfigyelés, hogy ezek egyike sem kapható meg első fajta perfekt Wythoff-politópként, tehát mindegyik második fajta. Legfontosabb adataikat a 3.4. táblázat első felében foglaljuk össze.

JEL	HIPERLAPOK	$f$ -VEKTOR	ORBIT VEKTOR
$t_{1,2}\alpha_4 = X$	10 arkhimédeszi csenkített tetraéder	(30, 60, 40, 10)	(1, 1, 2, 1)
$t_{1,2}\{3, 4, 3\} = Y$	48 arkhimédeszi csenkített kocka	(288, 576, 336, 48)	(1, 1, 2, 1)
$t_{0,3}\alpha_4$	10 szabályos tetraéder + 20 trigonális prizma	(20, 60, 70, 30)	(1, 1, 2, 2)
$t_{0,3}\{3, 4, 3\}$	48 szabályos oktaéder + 192 trigonális prizma	(144, 576, 672, 240)	(1, 1, 2, 2)
.....			
$f_{1,2}A_4$	30 tetragonális diszfenoid	(10, 40, 60, 30)	(1, 2, 1, 1)
$f_{1,2}F_4$	288 tetragonális diszfenoid	(48, 336, 576, 288)	(1, 2, 1, 1)
$f_{0,3}A_4$	20 romboéder	(30, 70, 60, 20)	(2, 2, 1, 1)
$f_{0,3}F_4$	144 tetragonális sztreptoéder	(240, 672, 576, 144)	(2, 2, 1, 1)

3.4. táblázat

A Coxeter-gráf – illetve az általa reprezentált alaptartomány – szimmetriáját még a  csoporttal kapcsolatban tudnánk a fentiekkel analóg módon kiaknázni, úgy, hogy a Wythoff-konstrukció kezdőpontját egy alkalmas él vagy 2-lap relatív belsejében vennénk fel. Az alábbi egyenlőségek [15] azonban azt mutatják, hogy ekkor minden esetben első fajta perfekt Wythoff-politópokat kapunk:





A 4-dimenziós Coxeter-csoportok (illetve a belőlük elő állítható Wythoff-politópok) további vizsgálata azt mutatja, hogy egyéb második fajta perfekt Wythoff-politóp, amely prím, az itt leírtakon nem konstruálható.

Megjegyezzük még, hogy a szabályos sokszögek  $\square$ -négyzetei szintén második fajta perfekt Wythoff-politópok, hiszen  $\odot_p \bullet \bullet_p \odot$  ( $3 \leq p \neq 4$ ) alakúak. Ezeknek a szerkezete régóta ismert ([13], 124. o.); szimmetriacsoportjuk a  $(D_p \times D_p) \rtimes C_2$  csoporttal izomorf ([73], 55. o.).

Eredményeinket az alábbi tételben foglaljuk össze.

**3.8. Tétel.** *Az ebben az alfejezetben leírt*

- $t_{1,2}\alpha_4 = X$ ,
- $t_{0,3}\alpha_4$ ,
- $t_{1,2}\{3, 4, 3\} = Y$
- $t_{0,3}\{3, 4, 3\}$  és
- $\odot_p \bullet \bullet_p \odot$

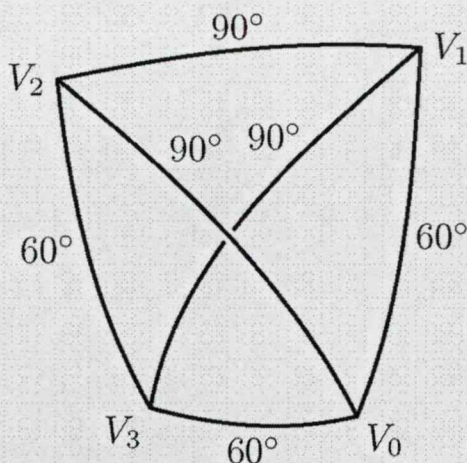
politópok második fajta perfekt Wythoff-politópok, és 4 dimenzióban ezeken kívül nincs is más ilyen politóp. Ezek közül az első négy típus prím és a Rostami-sejtéssel szemben ellenpéldát jelent.

### 3.4. Második fajta perfekt Wythoff-politópok polárisai

Most meghatározzuk az előző alfejezetben leírt négy politóptípus polárisát (Géva, [35]). Módszerünk a 3.2. alfejezetben ismerttetett faktortesszelációs eljárás, amelynek az ott már bemutatott, szemléletes változatát alkalmazzuk.

Induljunk ki ismét az  $A_4 = \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$  csoport  $D$  alaptartományából (illetve a megfelelő fundamentális tesszelációból). Ezt a 3.5. ábra szemlélteti vázlatosan, ahol az élek fokszámai helyett most a megfelelő diéderes szögek

nagyságát tüntettük föl. A  $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$  politóp előállításához a  $V_1V_2$  él mentén a  $D$  szimplex 4 példányát kell egyesítenünk. Először tekintsük annak a két példánynak az egyesítését, amelyek a  $V_1V_2V_3$  lap mentén érintkeznek (ezek egymás tükörképei az illető lapra vonatkozóan). Ekkor nem hatlapú testet kapunk – mint az általánosságban várható lenne –, hanem egy tetraédert, minthogy mind a  $V_1V_2$ , mind pedig a  $V_1V_3$  él mentén az eredeti háromszöglapok egyenlő szárú háromszöggé egyesülnek. Közelebbről, mivel a  $V_1$  csúcs a  $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \cong D_{3h}$  alcsoport fixpontja, azért a  $V_0V_1$  él és ennek  $V_1V'_0$  tükörképe közös főkörön vannak; így ezek egy olyan éllé egyesülnek, amely a  $V_0V_2V'_0$  és  $V_0V_3V'_0$  új egyenlő szárú háromszögek közös alapját képezi. Mármint  $D$  két



3.5. ábra

másik példányának egyesítése az imént kapott nagyobb tetraéder egy tükörképét alkotja. Így a két kétszeres méretű tetraéder a közös  $V_0V_2V'_0$  tükörfal mentén szomszédos. Tehát a  $D$  szimplex 4 példányának egyesítése ismét egy tetraédert képez. Szimmetriaokoknál fogva ennek az új tetraédernek mind a négy lapja egyenlő szárú háromszög. Az ilyen tetraéder esetében szokásos külön elnevezéssel: ez egy *tetragonális diszfenoid* [13, 55] (természetesen, jelen esetben szférikus változatban). A faktortesszelációt az ezzel a diszfenoiddal ekvivalens tartományok fogják alkotni (ezekből 30 lesz, mivel  $|A_4| = 120$ ). Jelöljük ezt az új tartományt  $\overline{D}$ -vel.

A  $V_1V_2$  él stabilizátora a  $[[3, 3, 3]]$  csoporton belül a korábban már említett  $[4, 2^+] \cong D_{2d}$  csoport (ld. 28. o.). Ez egyúttal a  $\overline{D}$  tartomány stabilizátora is (és egybeesik annak szimmetriacsoportjával). E csoport fixpontja pontosan a tekintett él felezőpontja, amit  $M_{12}$ -vel jelöltünk. Politópunknak a most előállított gömbi képből való rekonstrukciója során – a szimmetria megőrzése érdekében – a hiperlapokat meghatározó hipersíkokat úgy kell tehát fölvennünk, hogy azok az



$M_{12}$ , illetve ezzel ekvivalens pontokban érintsék az  $\mathbb{S}^3$  gömböt.

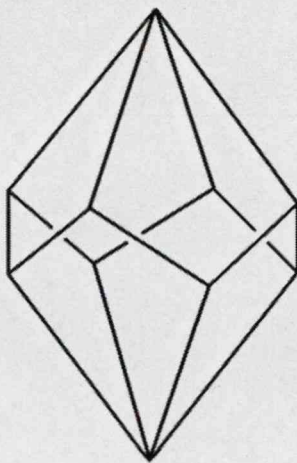
Ezért a 3.6. Állítás értelmében politópunk az  $X$  Wythoff-politópunk polárisa, tehát alkalmazhatjuk rá az  $X^*$  jelölést.

Az  $X^*$  politópot 30 tetragonális diszfenoid határolja. Másrészt, 10 csúcsa közül öt a  $V_0$ , öt pedig a  $V_3$  csúccsal ekvivalens.

Ez utóbbi észrevételből közvetlenül adódik, hogy  $X^*$  úgy is előáll, mint két egybevágó, egymással poláris, szabályos 5-cella konvex burka. Ez a kép motiválja azt az elnevezést, amelyet Conway és Sloane erre a politópra – illetve tetszőleges dimenziós analogonjaira – bevezetett: *diplo-szimplex* [9] (ilyen értelemben a 3-kocka is felfogható diplo-szimplexnek).

Ahogy az  $X$  és  $Y$  politóp egymás szoros analogonja,  $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet = Y^*$  konstrukciója is lényegében megegyezik az imént leírtakkal. Itt tehát szintén tetragonális diszfenoid hiperlapokat kapunk, ezúttal 288-at.

Az  $f_{0,3}A_4 = \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$ , illetve  $f_{0,3}F_4 = \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$  politóp előállítására részleteiben már jobban eltér az előbbiektől. Mivel azonban a konstrukció technikája ugyanaz, ezekre a részletekre nem térünk ki, csupán megemlítjük, hogy a hiperlapok most romboéderek, illetve tetragonális sztreptoéderek lesznek. A romboéderek oblát romboéderek, azaz poláris csúcsaikban a rombuszok tompaszögű csúcsai találkoznak. A tetragonális sztreptoédert, amelyet a 3.6. ábra szemléltet, 8 egybevágó deltoid határolja, szimmetriacsoportja a  $D_{4d} \cong [8, 2^+]$  csoport.



3.6. ábra

A most előállított 4 politóptípus néhány adatát a 3.4. táblázat második felében összegeztük.



### 3.5. Harmadik fajta perfekt Wythoff-politópok

Ebben az alfejezetben olyan perfekt 4-politópoknak egy végtelen sorozatát írjuk le (Gévay, [35] alapján), amelyek nem sorolhatók az előző osztályok egyikébe sem.

**3.9. Definíció.** Egy perfekt Wythoff-politópot *harmadik fajta perfekt Wythoff-politóp*nak nevezünk, ha nem első és nem második fajta.

Ezt a definíciót egybevetve a 2.2., 3.1. és 3.7. Definícióval, adódik az alábbi

**3.10. Következmény.** Egy harmadik fajta perfekt Wythoff-politópot csak olyan Wythoff-konstrukcióval lehet előállítani, amelyben a csoport egy Coxeter-csoport 2 indexű forgási részcsoportha.

Induljunk ki a  $[p] \times [p] \cong [p, 2, p] = \bullet \text{---}_p \bullet \quad \bullet \text{---}_p \bullet$  ( $p \geq 3$ ) Coxeter-csoportból. Vegyük ennek a 2 indexű forgási részcsoporthát, azaz a  $[p, 2, p]^+$  csoportot. Ez utóbbi prezentációja Coxeter nyomán ([18] 125. o.) a következő. Ha a  $[p, 2, p]$  csoportot a  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  tükrözések generálják, akkor  $[p, 2, p]^+$  generátorai, illetve a definiáló relációk:

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= \sigma_0 \sigma_1, \quad \varrho_1 = \sigma_1 \sigma_2, \quad \varrho_2 = \sigma_2 \sigma_3, \\ \varrho_0^p &= \varrho_1^2 = \varrho_2^p = (\varrho_0 \varrho_1)^2 = (\varrho_0 \varrho_1 \varrho_2)^2 = (\varrho_1 \varrho_2)^2 = 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Meghatározzuk most  $[p, 2, p]^+$  alaptartományát. Jelölje  $D$  a  $[p, 2, p]$  csoport alaptartományát (ami egy gömbi tetraéder), és  $V_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) e tetraéder csúcsait. Világos, hogy amikor áttérünk a  $[p, 2, p]$  csoportról a  $[p, 2, p]^+$  csoportra, akkor  $D$  falait eltávolítjuk, az élek azonban – amik a  $\varrho_i = \sigma_i \sigma_j$  forgatásoknak felelnek meg – megmaradnak (és természetesen ezzel együtt megmaradnak a csúcsok is). Válasszunk most egy  $A$  belső pontot és tükrözzük ezt  $D$  mind a négy falára külön-külön. Jelölje a tükörképeket rendre  $A_0, A_1, A_2, A_3$ . Ekkor a  $\text{conv}\{V_0, V_1, V_2, V_3, A_0, A_1, A_2, A_3\}$  konvex burok éppen  $[p, 2, p]^+$  egy alaptartományát szolgáltatja. (Megjegyezzük, hogy mivel az  $\mathbb{S}^3$  gömbön dolgozunk, műveleteink, úgymint a konvex burok képzése, illetve a tükrözések gömbi értelemben veendők). Ezt az alaptartományt  $D^+$ -szal fogjuk jelölni.

$D^+$  alakjával kapcsolatban a következőt figyelhetjük meg. Először is, a  $[p, 2, p]$  szimbólumban kódolt definiáló relációkból következik, hogy  $D$  egy (gömbi) tetragonális diszfenoid. Diéderes szögei közül négy  $\pi/2$ , a fennmaradó kettő

pedig  $\pi/p$  nagyságú. Másodsor, az  $A$ -t  $A_i$ -ba vivő tükrözések miatt a  $D^+$  tartomány előállításakor minden egyes  $V_i V_j$  él mentén a diéderes szög megduplázódik. Ebből következik, hogy  $D^+$  az általános esetben várható 12 háromszöglap helyett 4 négyszöglappal és 4 háromszöglappal rendelkezik.

Vegyük most tekintetbe, hogy egy tetragonális diszfenoid szimmetriacsoportja  $D_{2d} \cong [4, 2^+]$ .  $D^+$  előállítása során pontosan akkor őrződik meg  $D$  szimmetriája, ha  $A$  pont gyanánt ennek a csoportnak a fixpontját választjuk. Az ilyen módon választott speciális helyzetű pontot  $A_{(0)}$ , az ennek megfelelő speciális szimmetriájú alaptartományt pedig  $D_0^+$  fogja jelölni.

A  $[p, 2, p]^+$  csoporthoz tartozó fundamentális tesszelációt, amelyet  $A_{(0)}$  választásával kaptunk, egy  $P$  politóp gömbi képének fogjuk tekinteni. Ebben az esetben  $P$  rekonstrukciója a gömbi képből különösen egyszerű. Nevezetesen, felveszünk egy  $H$  hipersíkot, amely az  $A_{(0)}$  pontban érinti az  $S^3$  gömböt. Képezzük ennek  $([p, 2, p]^+)$  szerinti összes transzformáltját, majd minden egyes így kapott hipersíkhöz vesszük az általa határolt és a gömböt tartalmazó zárt félteret. E félterek metszete a  $P$  politópot szolgáltatja.

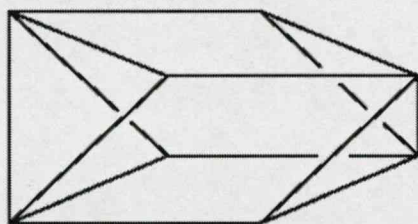
Megjegyezzük, hogy általános helyzetű  $A$  pont esetén  $H$  érintési pontjának az  $A_0 A_1 A_2 A_3$  tetraéder köré írt gömb középpontját kell választani, mint azt a [34] dolgozatban megmutattuk (az így kapott pont egyébként  $A$ -nak *izogonális konjugáltja* [10, 56]). A jelen speciális esetben azonban ez a pont egybeesik a  $V_0 V_1 V_2 V_3$  tetraéder körülírt, valamint beírt gömbjének középpontjával, és így a  $G(D) = G(D_0^+)$  szimmetriacsoport fixpontjával.

A fentiek alapján a szóban forgó szimmetriacsoport a  $D_{2d}$  csoporttal izomorf, és közvetlenül látható, hogy erre a csoportra nézve a  $[p, 2, p]^+$  csoport (3.2) prezentációja is invariáns.  $D_{2d}$  tehát a  $[p, 2, p]^+$  csoport külső automorfizmusainak egy csoportja. Ezért  $P$  szimmetriacsoportja izomorf a  $[p, 2, p]^+ \rtimes D_{2d}$  szemidirekt szorzattal. Megfigyelhető, hogy ennek a bővebb csoportnak a szférikus szimmetriaállványzatában az  $A_{(0)}$  pont nódus.

A konstrukció egy közvetlen következménye, hogy  $P$  hiperlap-tranzitív. Másrészt, a csúcsok 2 tranzitivitási osztályt képeznek, amit a következőképpen láthatunk be. Nevezzük a csúcsokat  $V$ , illetve  $A$  típusú csúcsoknak annak alapján, hogy ezek megfeleltethetők a  $D_0^+$  tartomány részint  $V_i$ , részint  $A_j$  csúcsainak. Ezek a típusok egyben tranzitivitási osztályok is a  $G(P)$  csoportra vonatkozóan. Valóban, egy  $A$  típusú csúcs stabilizátora a  $D_{2d}$  csoporttal izomorf, és ez  $G(P)$  konjugált alcsoportjainak egy osztályát határozza meg. Egy  $V$  típusú csúcs stabilizátora pedig a  $D_p \cong [p, 2]^+$  csoporttal izomorf, és ez egy másik konjugált alcsoportosztályt határoz meg  $G(P)$ -ben.

$P$  éleinek szintén 2 típusa van,  $VV$ , illetve  $VA$  a végpontok típusa szerint. Világos, hogy ez a 2 típus szintén egy-egy tranzitivitási osztályt alkot. Ennek

egy egyszerű következménye, hogy  $P$  négyszöglapjai rombuszok, háromszöglapjai pedig egyenlő szárú háromszögek. Speciálisan, mint azt egyszerű számítás mutatja,  $p = 4$  esetén ez utóbbiak éppen egyenlő oldalú háromszögek.  $P$  hiperlapjai tehát egy tetragonális prizma és egy tetragonális diszfenoid metszetének tekinthetők. A 3.7. ábra ezt az alakzatot mutatja a  $p = 4$  esetben (ekkor a tetragonális diszfenoidból szabályos tetraéder lesz).  $P$  orbit vektora a fentiek alapján:  $\theta(P) = (2, 2, 2, 1)$ .



3.7. ábra

A  $P^*$  poláris politópra áttérve, a konstrukcióból közvetlenül következik, hogy ennek csúcsai az  $A_{(0)}$  pont  $[p, 2, p]^+$  szerinti transzformáltjai. Ezért a 2.2. Definíció szerint Wythoff-politóp, minthogy  $[p, 2, p]^+$  a  $[p, 2, p]$  Coxeter-csoport 2 indexű forgási részcsoporthja.

Coxeter rendszerében ennek jelölése a következő:

$$\bigcirc \text{---} \underset{p}{\text{---}} \bigcirc \quad \bigcirc \text{---} \underset{p}{\text{---}} \bigcirc \cdot$$

(Megjegyezzük, hogy a csomópontok hiánya a gyűrűk belsejében épp azt jelzi, hogy a  $[p, 2, p]$  generátorainak megfelelő tükör-hipersíkokat eltávolítottuk. Másrészt, a gyűrűk száma azt mutatja, hogy Wythoff-konstrukció kezdőpontja a  $D$  alaptartomány belső pontja; Coxeter a [15] cikkben megmutatja, hogy forgási részcsoporthoz ez az egyetlen lehetséges pozíció ahhoz, hogy uniform politópot kapjunk.)

$P^*$  hiperlapjainak alakját abból tudjuk megállapítani, hogy  $P$  esetében ismerjük csúcsainak stabilizátorait, valamint egy adott csúcsban találkozó hiperlapjainak számát, illetve helyzetét a stabilizátor szimmetriállandóhoz képest. Azt találjuk, hogy a  $V$  típusú súlyponttal rendelkező hiperlapok  $p$ -gonális anti-prizmák, az  $A$  típusú súlyponttal rendelkező hiperlapok pedig tetragonális diszfenoidok.

Világos továbbá, hogy  $P^*$  perfekt, ami a 2.14. Tétel alapján abból következik, hogy csúcstranzitív és csúcsai nodálisak. Tehát a fenti konstrukció perfekt Wythoff-politópok egy végtelen sorozatát szolgáltatja, amelyet a  $p$  szám



paraméterez. Másrészt, a 4-dimenziós Coxeter-csoportok ismeretében megállapítható, hogy nincs olyan Wythoff-konstrukció, amely Coxeter-csoportból kiindulva e politópok valamelyikét szolgáltatná. Így tehát  $P^*$  politópjaink harmadik fajta perfekt Wythoff-politópok.

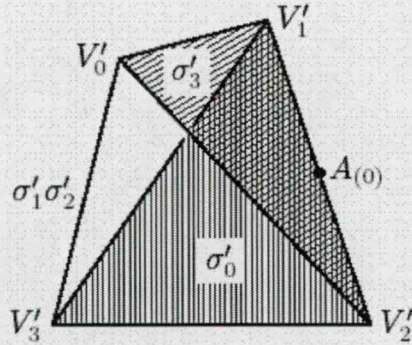
Megjegyezzük, hogy a sorozat természetes módon kiegészíthető a  $p = 2$  értéknek megfelelő politóppal.  $P$  ekkor a 4-kocka lesz (mivel ebben az esetben  $D$  szabályos tetraéder, melynek összes diéderes szöge  $\pi/2$ ).  $P^*$  pedig olyan politópnak tekinthető, amelynek 8 hiperlapja szabályos tetraéder, másik 8 hiperlapja pedig „digonális antiprizma” – tehát valójában ez a szabályos 16-cella.

Ez utóbbi észrevétel alapján adódik egy másik lehetőség a  $P^*$  politópok végtelen sorozatának leírására. Induljunk ki abból, hogy a szabályos 16-cella „fél-mértékpólitóp” is felfogható [13]. Egy fél-mértékpólitóp a következőképpen állítható elő egy  $d$ -kockából ( $d \geq 3$ ). Kiválasztjuk a kocka váltakozó csúcsait úgy, hogy minden él egyik végpontját megtartjuk, a másikat eltávolítjuk. Ezután vesszük a megmaradt csúcspontok konvex burkát. Vegyük most tekintetbe, hogy egy 4-kocka felírható két egybevágó négyzet  $\{4\} \square \{4\}$  alakú szorzataként. Általánosabban, vegyük két szabályos  $2p$ -gon  $\{2p\} \square \{2p\}$  alakú szorzatát. Ez egy (nemprím) „prizmatikus” perfekt politóp. Megmutatható, hogy a perfektség megőrződik, ha a váltakozó csúcspontokat kiválasztjuk az imént leírt módon, és vesszük a megmaradt csúcspontok konvex burkát. (A konstrukció végrehajtható, amit az biztosít, hogy a szorzatpolitóp minden 2-lapja páros oldalszámú sokszög.) Ezzel az eljárással éppen a  $P^*$  politópot állítottuk elő. Az eredeti  $2p$ -gonális prizma hiperlapokból  $p$ -gonális antiprizma hiperlapokat kapunk, egy eltávolított csúccsal szomszédos négy csúcs pedig mindenütt egy-egy tetraéder hiperlapot szolgáltat.

Ennek alapján  $P^*$  politópjainkat ( $p$ -gonális) *antiprizmatikus perfekt politópoknak* fogjuk nevezni.

Most megmutatjuk, hogy ezek előállíthatók a Wythoff-konstrukció egy általánosított változatával is. Ehhez a  $[p, 2^+, p]$  csoportból indulunk ki. Vegyük a  $[p, 2, p]$  csoport egy új példányát és jelöljük ennek standard generátorait a  $\sigma'_0, \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  szimbólumokkal. A  $[p, 2^+, p]$  csoport generátorai ekkor megadhatók a  $\sigma'_0, \sigma'_1\sigma'_2, \sigma'_3$  alakban ([15], 569. o.). Az 3.8. ábra e csoport szimmetriá-állványzatának egy jellemző részletét mutatja. Az ábra azt is szemlélteti, hogy  $[p, 2, p]$  négy generátora közül kettőt elhagytunk, szorzatukat azonban – vagyis a  $\sigma'_1\sigma'_2$  transzformációt – megtartottuk.

Válasszuk a konstrukció kezdőpontjának a  $V'_1V'_2$  él  $A_{(0)}$  felezőpontját. E pont pályának a konvex burka ismét a  $P^*$  politópot szolgáltatja, amit a következőképpen láthatunk be. Vegyük a  $V'_0V'_1V'_2V'_3$  tetraédert és egyesítsük az alábbiak szerint kapott három transzformáltjával: tükrözzük a  $V'_0V'_1V'_2$  falra; tükrözzük a  $V'_1V'_2V'_3$  falra; és végül forgassuk el egy félfordulattal a  $V'_1V'_2$  él körül. E négy



3.8. ábra

tetraéder egyesítése egy nagyobb tetraédert ad, amelyet azonosíthatunk az előző konstrukciónkhoz kiindulásul szolgáló  $V_0V_1V_2V_3$  tetraéderrel. Ekkor  $A_{(0)}$  a fentebb ugyanígy jelölt ponttal esik egybe, továbbá adódik még a  $V'_0 = V_0$  és  $V'_3 = V_3$  azonosítás.

Az így leírt megfeleltetés alapján az alábbi izomorfizmust állapíthatjuk meg:  $[p, 2, p]^+ \rtimes D_{2d} \cong [[2p, 2^+, 2p]]$ . (A kettős zárójel a jobb oldalon arra utal – a Coxeter-féle jelölésrendszerben –, hogy a  $[2p, 2^+, 2p]$  csoportot a  $V'_0V'_3$  és  $V'_1V'_2$  élek felezőpontját összekötő tengely körüli félfordulattal bővítettük.) Kijelenthetjük tehát, hogy  $p$ -gonális antiprizmatikus politópjaink szimmetriacsoportja izomorf a  $[[2p, 2^+, 2p]]$  csoporttal.

Végül, egyszerű megfontolások alapján a következő  $f$ -vektort kapjuk:  $f(P) = (2p^2 + 4p, 8p^2 + 4p, 8p^2, 2p^2)$ .

Eredményeinket a következő tételben összegezzük:

**3.11. Tétel.** *A fentiekben konstruált  $p$ -gonális ( $p \geq 3$ ) antiprizmatikus 4-politópok harmadik fajta perfekt Wythoff-politópok egy végtelen sorozatát képezik. Csúcshalmazuk megadható mind a  $[p, 2, p]^+$  csoportra, mind pedig a  $[p, 2^+, p]$  csoportra vonatkozó orbitként. Szimmetriacsoportjuk izomorf a  $[p, 2, p]^+ \rtimes D_{2d} \cong [[2p, 2^+, 2p]]$  csoporttal.  $f$ -vektoruk:  $f(P^*) = (2p^2, 8p^2, 8p^2 + 4p, 2p^2 + 4p)$ . Orbit vektoruk:  $\theta(P^*) = (1, 2, 2, 2)$ .*



## 4. Nem-Wythoff perfekt 4-politópok

Ha egy  $P$  politóp maga nem állítható elő Wythoff-konstrukcióval, de a polárisa igen, azt mondhatjuk, hogy „polárisan Wythoff-féle”, és mivel a poláris szerkesztés minden esetben megvalósítható, a Wythoff-konstrukciótól lényegében nem szakadtunk el.

A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy a perfekt politópok köre bővebb ennél (Gévay, [36, 37, 39]).

**4.1. Definíció.** Egy  $P$  politópot *nem-Wythoff politóp*nak nevezünk, ha sem  $P$ , sem  $P^*$  nem állítható elő Wythoff-konstrukcióval.

Ezeknek a politópoknak a konstrukciója mind változatosabb – illetve esetenként, összetettebb – módszereket igényel. A 4. és 5. fejezet tárgya ilyen konstrukciók, illetve politópok leírása.

### 4.1. Konstrukció szabályos politópokból

**4.1.1. KONSTRUKCIÓ.** (Gévay, [36]) Vegyünk egy  $P^{(4)}$  4-politópot, melyre a következő feltételek teljesülnek:

- (a)  $P^{(4)}$  hiperlap-tranzitív politóp;
- (b)  $P^{(4)}$  egy hiperlapjának a stabilizátora  $G(P^{(4)})$ -ben izomorf egy szabályos 3-politóp szimmetriacsoportjával.

Foglaljuk bele  $P^{(4)}$  minden hiperlapjába egy  $P^{(3)}$  3-politópnak egy példányát úgy, hogy a következő feltételek teljesüljenek:

- (c)  $P^{(3)}$  perfekt politóp;
- (d)  $P^{(3)}$  befoglalt példányai a  $G(P^{(4)})$  csoportra nézve egyetlen orbitot képeznek;
- (e) a befoglalt példányokat stabilizálja a befoglaló hiperlap  $G(P^{(4)})$ -beli stabilizátora;
- (f)  $P^{(3)}$  csúcsainak halmaza e stabilizátor hatására 2 tranzitivitási osztályra bomlik;
- (g) az egyik osztályba tartozó csúcsok mindegyike a befoglaló hiperlap határán helyezkedik el és nódussal esik egybe (a gömbi képen tekintve).





Végül vegyük  $P^{(3)}$  összes befoglalt példánya csúcshalmazának egyesítését, és képezzük az így kapott halmaz konvex burkát.

A 4.1.1. Konstrukciót most úgy alkalmazzuk, hogy  $P^{(4)}$  gyanánt szabályos 4-politópokat választunk. Ebben az esetben a konstrukció (b) feltétele automatikusan teljesül. Továbbá azt találjuk, hogy a  $P^{(4)}$  szabályos politóp minden típusa esetén az (a)–(g) feltételek által megengedett perfekt  $P^{(3)}$  poliéder egyértelműen meghatározott (utalunk itt a 2.5. Tételre, mely szerint a perfekt 3-politópoknak összesen 9 típusa létezik, és ezeket jól ismerjük). Nevezetesen, könnyen ellenőrizhető az alábbi

**4.1. Állítás.** *Ha  $P^{(4)}$  szabályos 4-politóp, akkor a 4.1.1. Konstrukció (a)–(g) feltételei által megengedett  $P^{(3)}$  perfekt politópok a következők:*

- kocka a szabályos 5-cella, 16-cella és 600-cella esetén;
- rombdodekaéder a hiperkocka és a szabályos 24-cella esetén;
- rombikus triakontaéder a szabályos 120-cella esetén.

Most meghatározzuk az eredményül kapott  $P$  politóp hiperlapjainak típusait. Rögtön adódik az első típus: maga a  $P^{(3)}$  poliéder minden egyes esetben. Ez az intuitíve nyilvánvaló tény az alábbi lemma segítségével formálisan is bizonyítható.

**4.2. Lemma.** *Legyen  $A$  az  $\mathbb{R}^n$  tér egy részhalmaza,  $H$  pedig egy hipersík, melyre teljesül, hogy  $A \cap H \neq \emptyset$  és  $A \subset K$ , ahol  $K$  a  $H$  által meghatározott egyik zárt féltér  $\mathbb{R}^n$ -ben. Ekkor  $\text{conv}(A \cap H) = (\text{conv} A) \cap H$ .*

*Bizonyítás.* Először belátjuk, hogy  $\text{conv}(A \cap H) \subseteq (\text{conv} A) \cap H$ . Az  $A \subseteq \text{conv} A$  relációból következik, hogy  $A \cap H \subseteq (\text{conv} A) \cap H$ . A konvex lezárás monotonitása miatt ekkor  $\text{conv}(A \cap H) \subseteq \text{conv}((\text{conv} A) \cap H)$ . Mivel  $\text{conv} A$  és  $H$  egyaránt konvex, és így  $(\text{conv} A) \cap H$  is konvex, ezért  $\text{conv}((\text{conv} A) \cap H) = (\text{conv} A) \cap H$ , amiből következik az állítás.

A fordított irányú tartalmazás belátásához válasszunk egy  $x \in (\text{conv} A) \cap H$  pontot. Ekkor érvényes: (1)  $x \in \text{conv} A$  és (2)  $x \in H$ . (1) miatt  $x$  előáll mint  $A$  pontjainak alkalmas konvex kombinációja. De mivel  $H$  támasz hipersíkja a  $\text{conv} A$  halmaznak, (2) miatt  $x$  ennek a halmaznak a határán van, ezért a konvex kombinációban nem vehet részt  $A \setminus H$ -beli elem. Így tehát  $x \in \text{conv}(A \cap H)$ , és ezzel beláttuk, hogy  $(\text{conv} A) \cap H \subseteq \text{conv}(A \cap H)$ . ■

Legyen most  $A$  a befoglalt  $P^{(3)}$  poliéderpéldányok egyesítéseként előálló halmaz,  $F$  az egyik poliéderpéldány, és  $H$  az  $F$ -et tartalmazó hipersík. Világos, hogy  $A \cap H = F$ . A lemma másik feltétele is természetes módon teljesül  $H$ -ra,

ezért  $(\text{conv} A) \cap H = \text{conv}(A \cap H)$ . Mivel  $\text{conv} A = P$ , és  $\text{conv} F = F$ , kapjuk, hogy  $P \cap H = F$ . Ezzel bizonyítottuk, hogy  $F$  hiperlapja  $P$ -nek.

Az ilyen hiperlapokat a továbbiakban  $F_3$  típusú hiperlapoknak fogjuk nevezni.

Látni fogjuk, hogy a szabályos 16-cella esetét kivéve még további 2 hiperlap-típus fog megjelenni. Itt megjegyezzük, hogy  $P$  leírását úgy fogjuk megvalósítani, hogy állításaink egyidejűleg érvényesek legyenek a  $P^{(4)}$  szabályos politóp összes típusából adódó esetre; szemléletesen legkönnyebben megragadható példaként azonban a 4-kocka esetére fogunk hivatkozni.

A továbbiakban néhány észrevételre van szükségünk  $P$  csúcshalmazát illetően. Először is, minthogy az összes befoglalt  $P^{(3)}$  példányból hiperlap lesz, az ezekhez tartozó csúcshalmazok egyesítése egyenlő  $P$  csúcshalmazával. Az (a)–(g) feltételekből következik továbbá, hogy ez a halmaz  $P^{(4)}$  szimmetriacsoportjára nézve 2 tranzitivitási osztályra bomlik. A feltételek könnyen ellenőrizhető következményeként ennél többet is állíthatunk. Nevezetesen, minden egyes  $P^{(3)}$  példány úgy helyezkedik el  $P^{(4)}$  celláiban, hogy

- (1) az egyik osztályhoz tartozó csúcspontok a cellahatárookra illeszkednek, mégpedig úgy, hogy a cellák 2-lapjainak középpontjával esnek egybe;
- (2) a másik osztályhoz tartozó minden csúcspont egy olyan szakasz relatív belsejében helyezkedik el (a végpontoktól egy rögzített távolságra), ami a cella középpontját a cella csúcsával köti össze.

Erre a két osztályra a  $V_B$ , illetve  $V_I$  jelölést fogjuk használni.

Mármost a  $V_I$ -beli pontok elhelyezkedéséből közvetlenül adódik az alábbi észrevétel.  $P^{(4)}$  egy kiszemelt csúcsához legközelebb levő ilyen pontok konvex burka éppen  $P^{(4)}$  polárisának egy celláját képezi. (Például ha  $P^{(4)}$  a 4-kocka, akkor ez a cella egy szabályos tetraéder). Belátható, hogy az ily módon kapott szabályos poliéderek  $P$ -nek hiperlapjai lesznek. Ugyanis egy ilyen poliéderen átfektetett (azaz, a poliéder affin burkát képező) hipersík teljesíti a 4.2. Lemma feltételét, és így a lemmából már következik az állításunk. Ezzel megkaptuk  $P$  hiperlapjainak egy újabb típusát. Ezt a típust  $F_0$ -lal fogjuk jelölni. (A 0 index arra utal, hogy ezeknek a hiperlapoknak a középpontja – a gömbi képben –  $P^{(4)}$  0-dimenziós lapjaival, azaz csúcsaival esik egybe.)

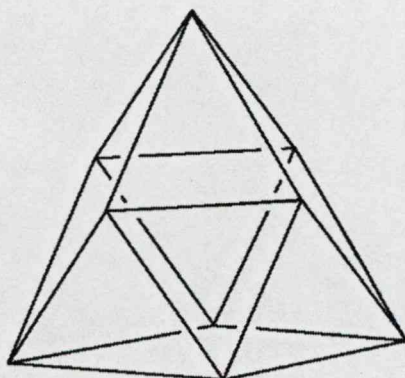
A most következő szerkesztés a harmadik, és egyben utolsó hiperlaptípust szolgáltatja. Legyen  $P^{(4)}$  egy  $\{p, q, r\}$  szabályos politóp. Ennek a politópnak az élei  $r$ -edfokúak, azaz, egy élen  $r$  számú cella osztozik. Ezért a 4.1.1. Konstrukció szerint  $P^{(4)}$  minden egyes éle körül  $r$  számú  $P^{(3)}$  példány helyezkedik el. Ezeknek a példányoknak a 2-lapjai minden esetben rombuszok (esetleg speciálisan négyzetek) (ld. 4.1. Állítás). Ezek a rombuszok továbbá úgy helyezkednek el, hogy  $P^{(4)}$  egy kiszemelt  $E$  élének közvetlen környezetében levő példányaik a





szemközti csúcsaikon keresztül csatlakozva egy  $r$ -tagú gyűrűt képeznek. Megjegyezzük, hogy ennek a gyűrűalakzatnak a stabilizátora megegyezik az  $E$  él stabilizátorával. Az alakzat konvex burkát véve egy olyan poliédert kapunk, ami a keresett harmadik hiperlaptípusnak felel meg. Ez a 4.2. Lemma alapján az előbbihez hasonló módon látható be. Mivel a stabilizátor fixpontja  $P^{(4)}$  egy 1-dimenziós lapjára illeszkedik, ezt a típust  $F_1$ -gyel fogjuk jelölni.

Egy ilyen  $F_1$  típusú hiperlap alakja  $P^{(4)} = \{4, 3, 3\}$ , azaz a 4-kocka esetén a 4.1. ábrán látható. Általánosan tekintve, ez egy csonkított  $r$ -gonális dipiramis. A csonkító síkok helyzete olyan, hogy normálvektoruk a dipiramis középpontjából egy-egy csúcsba mutató vektorral esik egybe. A síkoknak a dipiramis középpontjától való távolsága pedig akkora, hogy két olyan sík metszészvonala, amely egymással szomszédos csúcsokat csonkít, átmegy a csúcsokat összekötő élen.



4.1. ábra

Az imént leírt szerkesztéseket a gömbi képben tekintve megfigyelhetjük, hogy az  $F_3$ ,  $F_0$  és  $F_1$  típusoknak megfeleltetett gömbi tartományok összessége  $\mathbb{S}^3$  egy tesszelációját szolgáltatja. Így tehát csakugyan megtaláltuk  $P$  hiperlapjainak összes típusát. A három típus definíciója azt mutatja, hogy  $P$  polárisan nodális.

Könnyen ellenőrizhető, hogy  $P^{(4)} = \{3, 3, 4\}$ , azaz a szabályos 16-cella esetének kivételével a konstrukció megőrzi  $P^{(4)}$  szimmetriáját, azaz  $G(P) = G(P^{(4)})$ . Világos továbbá, hogy a hiperlapok típusai e csoportra nézve egyben tranzitivitási osztályokat is jelentenek. A hiperlapok csatlakozási módját megfigyelve a 2-lapok tranzitivitási osztályait is könnyen megállapíthatjuk. Azt találjuk, hogy ezekből szintén 3 van. (Megjegyezzük, hogy mindhárom osztálynak van képviselője az  $F_1$  típusú hiperlapokon). Másrészt, mind a csúcsok, mind az élek halmaza 2 tranzitivitási osztályra bomlik. Azt kapjuk tehát, hogy  $P$  hat típusából ötnek az orbit vektora:  $(2, 2, 3, 3)$ .



A szabályos 16-cella azért képez kivételt, mert itt a konstrukció az  $F_3$  és  $F_0$  típus esetében egyaránt kockát eredményez, az  $F_1$  típusú hiperlapok pedig kuboktaéderek lesznek. A két különböző típusba tartozó kockák az eredeti  $[3, 3, 4]$  csoporthoz képest egy bővebb szimmetriacsoportra, nevezetesen a  $[3, 4, 3]$  csoportra nézve ekvivalensek lesznek, azaz egyetlen tranzitivitási osztályt képeznek. Az így nyert politóp tehát a szabályos 24-cella egy egyszerű csonkítása. Coxeter jelölésében ([15], 575. o.) ez nem más, mint a  $t_1\{3, 4, 3\} = t_{0,2}\beta_4$  (uniform) Wythoff-politóp.

Másrészt, a  $(2, 2, 3, 3)$  orbit vektorral rendelkező politópjaink mindegyike nem-Wythoff politóp, hiszen az orbit vektor 1. és 4. komponense egyaránt különbözik 1-től.

Ezekre a politópokra a következő jelölést vezetjük be:  $W_4(i, j, k)$ , ahol  $W = A, B, F$  vagy  $H$ ;  $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Itt a nagybetűk a megfelelő Coxeter-csoportra utalnak; az indexek pedig azt jelzik, hogy a különböző hiperlaptípusok középpontja (a gömbi képben) a fundamentális tetraéder mely csúcsával esik egybe.

Nem-Wythoff politópjaink 5 típusának néhány numerikus adatát az 4.1. táblázat tartalmazza (ezek az adatok könnyen meghatározhatók a szabályos 4-politópok  $f$ -vektorának ismeretében).

JEL	$F_0$	$F_1$	$F_3$	$f$ -VEKTOR
	TÍPUSÚ HIPERLAPOK SZÁMA			
$A_4(0, 1, 3)$	5	10	5	(30, 90, 80, 20)
$B_4(0, 2, 3)$	16	32	8	(88, 288, 256, 56)
$F_4(0, 1, 3)$	24	96	24	(240, 864, 768, 144)
$H_4(0, 2, 3)$	600	1200	120	(3120, 10800, 9600, 1920)
$H_4(0, 1, 3)$	120	720	600	(3600, 10800, 8640, 1440)

4.1. táblázat

Hátravan a perfektség bizonyítása. Ehhez előkészületként megadunk egy másik konstrukciót  $W_4(i, j, k)$  politópjaink előállítására.

### 4.1.2. KONSTRUKCIÓ.

1. lépés. Képezzük az előbbi konstrukcióban  $V_B$ -vel jelölt pontrendszer konvex burkát. Vegyük most észre, hogy az ebbe az osztályba tartozó pontok nódust képeznek a  $G(P^{(4)})$  csoport (szférikus) szimmetriaállványzatában. Tehát egy olyan  $P_0$  politópot kaptunk, ami nodális. Ezenkívül csúcstranzitív, és így a 2.14. Tétel értelmében perfekt. Másrészt ez éppen a Coxeter által  $t_2\{p, q, r\}$  szimbólummal jelölt Wythoff-politóp [15]. Ez azt jelenti, hogy a  $\{p, q, r\}$  szabályos politóp egyszerű csonkításaként állítható elő. A csonkítás során  $\{p, q, r\}$  cellái – amelyek  $\{p, q\}$  szabályos poliéderek – a saját duálisukká, azaz a  $\{q, p\}$  szabályos poliéderré csonkulnak, az eredeti csúcsok helyett pedig  $\left\{\frac{q}{r}\right\}$  cellák jelennek meg. (Megjegyezzük, hogy ez az utóbbi, Coxetertől származó szimbólum a konkrét esetekben az oktaédert, kuboktaédert, illetve ikozidodekaédert jelenti, amit rendre  $\left\{\frac{3}{3}\right\}$ ,  $\left\{\frac{3}{4}\right\}$ , illetve  $\left\{\frac{3}{5}\right\}$  jelöl [12].)

2. lépés. Egészítsük  $P_0$  politópunk minden egyes  $\{q, p\}$  alakú hiperlapját egy alkalmas perfekt  $P^{(3)}$  poliéderré, a 4.1. Állításban szereplő eseteknek megfelelően. Nevezetesen:

- a tetraédert kockává,
- a kockát, illetve oktaédert rombdodekaéderré,
- a szabályos dodekaédert, illetve ikozaédert rombikus triakontaéderré.

E művelet során az összes eredeti  $P_0$  csúcs nyilván megmarad, míg az újonnan keletkezett csúcsok éppen a  $V_I$  rendszerbe fognak tartozni.

3. lépés. Vegyük az így keletkezett alakzat konvex burkát.

Világos, hogy ez a konstrukció csakugyan a kívánt  $W_4(i, j, k)$  politópot állítja elő. A perfektség most már könnyen belátható, a következőképpen:  $P_0$  perfektsége miatt a  $V_B$  rendszer pontjai nem mozdíthatók el a  $G(\{p, q, r\})$  csoport hatásának megváltozása nélkül. Továbbá a 2. lépésben kapott poliéderek alakja sem változtatható meg, hiszen ezek perfekt poliéderek, és a  $V_B$  rendszerbe tartozó csúcsaik miatt a helyzetük sem változhat.  $G(\{p, q, r\})$  szimmetriaállványzatában tehát nemcsak a  $V_B$ , hanem a  $V_I$  rendszer is rögzített, és ezért politópunk perfekt.

Eredményeinket az alábbi tételben foglaljuk össze:

**4.3. Tétel.** A  $\{p, q, r\}$  szabályos politópból a 4.1.1. Konstrukcióval kapott  $W_4(i, j, k)$  politóp összes típusa perfekt, polárisan nodális és  $B_4(0, 1, 3)$  kivételével nem-Wythoff. Szimmetriacsoportja  $[p, q, r]$ , és a nem-Wythoff típusok esetében az orbit vektor:  $\theta(W_4(i, j, k)) = (2, 2, 3, 3)$ .

A  $W_4(i, j, k)$  politópok előállítására érdemes egy harmadik konstrukciót is megadni, ami azt mutatja, hogy ezek igen egyszerűen, csonkítással is megkaphatók.

**4.1.3. KONSTRUKCIÓ.** Vegyünk egy  $P_1$  dipiramidális Kepler-politópot (ld. 3.1. táblázat). Csonkítsuk ennek összes csúcsát úgy, hogy a következő feltételek teljesüljenek:

- (a) minden csonkító hipersík merőleges a  $P_1$  súlypontjából az illető csúcsba mutató vektorra;
- (b) ha  $H_i$  és  $H_j$  két szomszédos csúcsot csonkító hipersík és  $E_{ij}$  a két csúcsot összekötő él, akkora  $H_i \cap H_j \cap E_{ij}$  halmaz nem üres és az  $E_{ij}$  él egyetlen relatív belső pontjából áll.

Az 3.5. Állítás alapján könnyen belátható, hogy ezzel a konstrukcióval is valóban a  $W_4(i, j, k)$  politópot kapjuk. A dipiramis hiperlapok apikális csúcsainak csonkítása az  $F_0$ , a báziscsúcsok csonkítása pedig az  $F_3$  típusú hiperlapokat eredményezi. Ez utóbbi esetben a 4.1.3. (b) feltételben szereplő pont éppen az alapél felezőpontja, ami a gömbi képben  $R$  egy 2-lapjának súlypontjával esik egybe, a 3.5. (d) feltételből következően.

Mindez hasznos megfigyelés, mert a konstrukció alkalmas módosításával a következő alfejezetben perfekt politópok egy újabb osztályát fogjuk előállítani.

## 4.2. Kepler-politópok részleges csonkítása

**4.2.1. KONSTRUKCIÓ.** (Géway, [37]) Alkalmazzuk a 4.1.3. Konstrukciót azzal a módosítással, hogy kizárólag a báziscsúcsokat csonkítjuk.

A báziscsúcsok csonkításával a dipiramis hiperlapokon ugyanazok a rombuszlapok keletkeznek, mint a 4.1.1. Konstrukcióban (a dipiramis alapélekből itt is a felezőpont marad meg). Az egyik új hiperlaptípust tehát ilyen, báziscsúcsaik csonkított dipiramisok képezik.

A másik típushoz tartozó hiperlapok azok, amelyek az eredeti báziscsúcsok helyén keletkeznek, tehát rombuszlapok fogják határolni. Ezek a rombikus poliéderek pontosan megegyeznek a 4.1. alfejezetben  $F_3$  típusúként jelölt hiperlapokkal, tehát a rombdodekaéder, rombikus triakontaéder, illetve kocka valamelyikével. Az ilyen hiperlapokat most  $B$  típusú hiperlapoknak fogjuk nevezni.

Az eredeti Kepler-politópok ismeretében a most kapott új politóptípusok néhány adata könnyen kiszámítható. A Kepler-politópok ehhez szükséges adatait



a 3.1. táblázat tartalmazza. Új politópjaink néhány adatát pedig a 4.2. táblázatban foglaltuk össze (e politópok jelölésében a 4.1. alfejezetben leírt elvet követjük).

JEL	$B$ TÍPUSÚ HIPERLAPOK	$f$ -VEKTOR
$A_4(1, 3) = A_4(0, 2)$	kocka	(35, 80, 60, 15)
$B_4(1, 3)$	kocka	(104, 256, 192, 40)
$B_4(0, 2)$	rombdodekaéder	(104, 256, 192, 40)
$F_4(1, 3) = F_4(0, 2)$	rombdodekaéder	(264, 720, 576, 120)
$H_4(1, 3)$	kocka	(3720, 9600, 7200, 1320)
$H_4(0, 2)$	rombikus triakontaéder	(3720, 9600, 7200, 1320)

4.2. táblázat

**4.4. Tétel.** A 4.2. táblázatban felsorolt politópok mindegyike perfekt, polárisan nodális és nem-Wythoff. A  $W_4(i, j)$ , ( $W \in \{A, B, F, H\}$ ) típusúhoz tartozó politópok szimmetriacsoportja:  $W_4$ . Orbit vektoruk: (3, 2, 2, 2).

*Bizonyítás.* A konstrukció közvetlen következménye, hogy  $W_4(i, j)$  összes típusa esetén a szimmetriacsoport megegyezik a  $W_4$  csoporttal ( $W \in \{A, B, F, H\}$ ). Az előző alfejezetben konstruált politópoktól eltérően, ezúttal nincs kivétel. Ugyanis, a  $B_4(1) = f_1 B_4$  politóp hiperlapjait nem szabályos oktaédernek tekintjük, hanem tetragonális dipiramisnak (melynek szimmetriacsoportja  $[2, 4] \cong D_{4h}$ ), és így a csonkítás során  $B_4$ , mint szimmetriacsoport, megőrződik.

Az egyes szimmetriacsoportok hatását figyelembe véve egyszerű feladat az orbit vektor komponenseinek meghatározása, aminek a részleteit itt mellőzzük.

Mivel mind a csúcsoknak, mind a hiperlapoknak egynél több orbitja van, politópjaink nem-Wythoff politópok.

A perfektségi a következőképpen látható be. Vegyük a  $P = W_4(i, j)$  politóp hiperlapjain átmenő összes támasz hipersíkok rendszerét. Ez a rendszer a  $G(P)$  csoport hatására 2 olyan tranzitivitási osztályra bomlik, amelyek egyike sem változtatható meg önmagában (homotéciától eltekintve) e hatás megváltozása nélkül. Ez az 1.14. Tétel következménye, mivel mindkét osztály egy-egy hiperlap-tranzitív politópot határoz meg, amelyek polárisa csúcstranzitív. Emellett, ez utóbbi politópok nodálisak is, és ezért mindkettő perfekt. Rögzítsük most az egyik hipersíkosztályt, mondjuk azt, amelyik a dipiramidális  $W_4(i)$  politópot

határozza meg. Ekkor elegendő azt vizsgálnunk, hogy van-e lehetőségünk a másik osztályra egy (nemtriviális) homotéciát alkalmazni. Azt találjuk, hogy ilyen lehetőség nincs. Ezek a hipersíkok ugyanis éppen a  $W_4(i, j)$  politóp konstrukciójában szereplő csonkító hipersíkok, és ezért teljesíteniük kell a 4.1.3. (b) feltételt, egészen pontosan, a  $W_4(i)$  politóp dipiramis-alapéleinek felezőpontjában kell metszeniük egymást. Ez a feltétel azonban nem teljesül, ha a hipersíkoknak  $W_4(i)$  középpontjától való távolsága megváltozik. Így tehát  $W_4(i, j)$  alakját nem változtathatjuk meg anélkül, hogy  $G(W_4(i, j))$  hatása meg ne változna, vagyis  $W_4(i, j)$  perfekt. ■

### 4.3. A $W_4(i, j)$ politópok polárisa

Az alábbi konstrukció közvetlenül, poláris szerkesztés nélkül szolgáltatja az előző alfejezetben előállított  $P$  politópok polárisait (Gévay, [37]).

**4.3.1. KONSTRUKCIÓ.** Vegyünk egy  $P_0$  dipiramidális Kepler-politópot és foglaljunk bele minden egyes  $F$  hiperlapjába egy kisebb  $F'$  dipiramist a következő módon.  $F$  és  $F'$  apikális csúcsai egybesnek, míg  $F'$  báziscsúcsai  $F$  alapél-felezőpontjaira illeszkednek. Végül vegyük az így elhelyezett  $F'$  dipiramisok rendszerének konvex burkát.

Jelölje  $P^*$  az így előálló politópot. Azt találjuk, hogy  $P^*$  hiperlapjainak 3 különböző típusa van. Az első típust maga az  $F'$  dipiramis képviseli, mint az a 4.2. Lemma alapján a 4.1. alfejezetben leírtakhoz hasonlóan belátható. A következő típus megállapításához vegyük figyelembe  $P_0$  és a hozzá társított  $R$  szabályos politóp kölcsönös helyzetének szabályszerűségeit, ahogyan azt a 3.5. Állítás rögzíti. Látható, hogy  $P_0$  dipiramis hiperlapjainak egy-egy alapél-felezőpontja (a gömbi képpen) egybeesik  $R$  egy megfelelő 2-lapjának súlypontjával. Ugyanezekkel a súlypontokkal fognak tehát egybeesni az  $F'$  dipiramisok báziscsúcsai. E csúcsoknak azon példányai, amelyek  $R$  egy adott hiperlapjának határán helyezkednek el, egy  $\{q, p\}$  szabályos poliéder csúcshalmazát képezik, feltéve, hogy  $R$  egy  $\{p, q, r\}$  szabályos 4-politóp.  $P^*$  második hiperlaptípusát tehát ezek a  $\{q, p\}$  szabályos poliéderek alkotják. Végül, a harmadik típust  $q$ -oldalú szabályos gúla képezik. Egy ilyen gúla alaplapja egy  $\{q, p\}$  poliéder valamely lapjával esik egybe, oldallapja pedig egy  $F'$  dipiramis oldallapjával közös.

Megjegyezzük, hogy a hiperlapok most megállapított típusai egyúttal tranzitivitási osztályokat is jelentenek a  $G(P^*)$  csoportra vonatkozóan (ez a csoport egyébként – az előbbi megállapodást figyelembe véve – nem más, mint  $[p, q, r]$ , mivel a konstrukció természetes módon megőrzi a szimmetriát).

$P^*$  típusait a  $W_4(i, j, \widehat{03})$ , ( $W \in \{A, B, F, H\}$ ;  $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ ) szimbólumal fogjuk jelölni. Ebben az első két szám a dipiramis, illetve szabályos poliéder hiperlapok pozícióját jelzi. A  $\widehat{03}$  szimbólum pedig arra utal, hogy a gúla hiperlapok egy alkalmas példányának súlypontja a gömbi képen a  $W_4$  csoport  $D$  alaptartománya egy meghatározott élének relatív belsejébe képeződik le. Ez az él pontosan az, amely a  $D$  tetraéder 0 és 3 jelű csúcsait köti össze.

A  $P^* = W_4(i, j, \widehat{03})$  politóp típusait, polárisukkal együtt, a 4.3. táblázatban soroljuk fel. Egyúttal megadjuk a különböző típusú hiperlapok számát is.

JEL	HIPERLAPOK	POLÁRIS
$A_4(0, 2, \widehat{03}) = A_4(1, 3, \widehat{03})$	10 trigonális dipiramis 5 szabályos tetraéder 20 trigonális piramis	$A_4(1, 3) = A_4(0, 2)$
$B_4(0, 2, \widehat{03})$	32 trigonális dipiramis 8 oktaéder 64 trigonális piramis	$B_4(1, 3)$
$B_4(1, 3, \widehat{03})$	24 tetragonális dipiramis 16 szabályos tetraéder 64 trigonális piramis	$B_4(0, 2)$
$F_4(0, 2, \widehat{03}) = F_4(1, 3, \widehat{03})$	96 trigonális dipiramis 24 kocka 144 tetragonális piramis	$F_4(1, 3) = F_4(0, 2)$
$H_4(0, 2, \widehat{03})$	1200 trigonális dipiramis 120 ikozaéder 2400 trigonális piramis	$H_4(1, 3)$
$H_4(1, 3, \widehat{03})$	720 pentagonális dipiramis 600 szabályos tetraéder 2400 trigonális piramis	$H_4(0, 2)$

4.3. táblázat





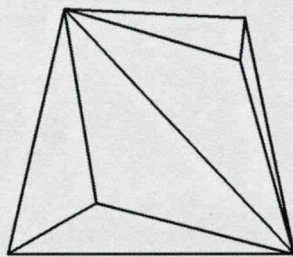
Röviden vázoljuk, hogyan látható be a poláris kapcsolat. A dualitás közvetlenül ellenőrizhető az  $f$ -vektorokat, illetve a különböző laptípusok illeszkedési relációit összehasonlítva. Ezen túlmenően, vegyük tekintetbe, hogy  $P^*$  csúcsai kétfélék, nevezetesen, a dipiramisok báziscsúcsai, illetve apikális csúcsai. Mármost közvetlenül megfigyelhető, hogy a gömbi képben ezek a csúcsok rendre a  $P$  politóp egy-egy csonkított dipiramis, illetve szabályos poliéder hiperlapjának súlypontjával esnek egybe. Ezek a pontok nódusok is, és stabilizátoruk megegyezik  $P$  egy-egy megfelelő hiperlapjának stabilizátorával. Ez biztosítja, hogy a poláris leképezésnél  $P^*$  csúcsai  $P$  hiperlapjaiba mennek át. A fent megelőlegezett  $P^*$  jelölés tehát jogos,  $P$  és  $P^*$  csakugyan egymás polárisa.

#### 4.4. Az $X(H, T)$ politóp

A 4.1.1. Konstrukciót most egy módosított formában fogjuk alkalmazni, ami 2 feltételt érint:

- (c')  $P^{(3)}$  izohedrális politóp;
- (g')  $P^{(3)}$  összes csúcsa a befoglaló hiperlap határán helyezkedik el és nódussal esik egybe (a gömbi képben tekintve).

$P^{(4)}$  legyen ezúttal  $X$ ,  $P^{(3)}$ -nak pedig *triakisztetraédert* választunk (4.2. ábra). A triakisztetraéder a geometriai kristálytanban kristályformaként jól ismert laptranzitív poliéder [8, 54, 55], amelyet előállíthatunk úgy, hogy egy szabályos tetraéder minden lapjára egy-egy szabályos háromoldalú gúlát emelünk. E gúlának nyilván egybevágóak és a magasságuk olyan, hogy a kapott test konvexitása biztosítva legyen (és hogy ne a kockát kapjuk). Szimmetriacsoportja megegyezik a szabályos tetraéderével.



4.2. ábra

$X$  egy cellájába úgy foglaljuk be, hogy a 6-odfokú csúcsok a cella háromszöglapjainak középpontjába, a 3-adfokú csúcsok pedig a hatszöglapok középpontjába essenek. Az a triakisztetraéder, amely ezt a feltételt teljesíti, éppen egy

Catalan-test. Sőt, ez magának az arkhimédeszi csonkított tetraédernek a polárisa [az egyenlő szárú háromszög lapok szárszöge ekkor  $\arccos(-7/18)$ ].

Új politópunk jelölésére a  $X(H, T)$  szimbólumot vezetjük be, ami arra utal, hogy a konstrukció során az  $X$  politópból indultunk ki, valamint, hogy a kapott politóp csúcsai az  $X$  politóp  $H$ , illetve  $T$  típusú pontjaival (azaz a hatszöglapok, illetve háromszöglapok középpontjával) esnek egybe.

Szerkezetét könnyebb lesz meghatározni, ha előbb egy egyszerűbb szerkezetű politópot vizsgálunk meg. Legyen ez az  $X$  politóp  $T$  típusú pontjainak konvex burkaként előálló  $X(T)$  politóp.  $X(T)$  nyilván csúcstranzitív, és mivel nodális, a 2.14. Tételből következően perfekt.

$X(T)$  hiperlapjainak meghatározásához először vegyük tekintetbe, hogy  $X(T)$ -ben egy  $H$  típusú pont – és így a megfelelő teljes hatszöglap – stabilizátora a  $[6, 2^+] \cong D_{3d}$  csoporttal izomorf (vö. 28. o.). Ezért egy hatszöglaphoz csatlakozó 6 háromszöglap középpontjainak konvex burka egy trigonális antiprizma.

Másrészt,  $X$  egy cellája 4 háromszöglapjának középpontjai egy szabályos tetraédert alkotnak. Világos, hogy  $X(T)$  hiperlapjainak ez a két típusa van.

$X(T)$  éleinek 2 tranzitivitási osztályát találjuk: az antiprizmák alapélei, illetve oldalélei (a tetraéderélek az antiprizma alapélekkel esnek egybe). Ezt a két osztályt  $E_B$ -vel, illetve  $E_S$ -sel fogjuk jelölni. A 3.2. ábra segítségével,  $X(T)$ -nek  $X$ -ből történő konstrukciója alapján a következőket figyelhetjük  $X(T)$  kombinatorikus szerkezetében. Egy antiprizma oldalél – legyen ez  $E$  – az  $X$  politóp két olyan háromszöglapjának középpontját köti össze, amelynek van egy közös  $V$  csúcsa. Ehhez a  $V$  csúcshoz  $X$ -nek további 4 hatszöglapja csatlakozik. Ezek a hatszöglapok egyenként olyan antiprizmákat határoznak meg, amelyek közül bármely kettőnek az  $E$  él közös éle. Másrészt több ilyen antiprizma nincs is. Tehát  $E$  és vele együtt az  $E_S$  osztályhoz tartozó összes él negyedfokú.

Itt jegyezzük meg, hogy a trigonális antiprizmák nem lehetnek szabályos oktaéderek, vagyis az oldallapjaik egyenlő szárú és nem szabályos háromszögek. Az alapélek és az oldalélek hosszára ugyanis (a 3.2. táblázatban foglalt koordináták alapján) a következő értékeket kapjuk:  $5\sqrt{2}$ , illetve  $2\sqrt{5}$ .

Az alapélek fokát a következőképpen állapíthatjuk meg. Jelölje  $E$  ezúttal  $X$ -nek egy élet, és tekintsük azt az alakzatot, amely  $X$  következő lapjainak egyesítéséből áll: az  $E$  él; az  $E$ -hez csatlakozó  $T$  háromszöglap és  $H$ , valamint  $H'$  hatszöglap; az  $E$  végpontjaihoz csatlakozó  $T'$ , valamint  $T''$  háromszöglap. Látható, hogy a  $T'$  és  $T''$  háromszöglap középpontját összekötő egyenesszakasz  $X(T)$ -ben egy  $\overline{E}$  alapélt képez. Ez az  $\overline{E}$  él közös alapéle annak a két antiprizmának, amelyet a  $H$ , illetve a  $H'$  hatszöglap határoz meg. Csatlakozik továbbá  $\overline{E}$ -hez  $X(T)$ -nek egy tetraéder hiperlapja is. Ez a tetraéder  $X$ -nek abban a cellájában helyezkedik el, amelyhez a  $H$  és  $H'$  hatszöglap egyaránt tartozik. Azt

kaptuk tehát, hogy egy  $E_B$  osztályba tartozó élhez  $X(T)$ -nek 2 antiprizma és 1 tetraéder hiperlapja csatlakozik. Egy alapél foka ezért 3.

$X(T)$  orbit vektora tehát a következő:  $\theta(X(T)) = (1, 2, 2, 2)$ . Az  $f$ -vektor:  $f(X(T)) = (20, 90, 100, 30)$ .

Megjegyezzük, hogy  $X(T)$ -ről megmutatható, hogy nem Wythoff-politóp.

Most megkonstruáljuk  $X(H, T)$ -t  $X(T)$ -ből. Abból az észrevételből indulunk ki, hogy egy  $A$  trigonális antiprizma felbontható 8 poliéderre, amely a következő. Először is 2 egybevágó trigonális piramis, amelyek alaplapja egybeesik  $A$  alaplapjával, közös apikális csúcsa pedig egybeesik  $A$  középpontjával. Másodszor, 6 egybevágó olyan gúla, melyek (egyenlő szárú háromszög) alaplapja  $A$  egy-egy oldallapjával esik egybe, közös apikális csúcsuk pedig szintén  $A$  középpontja. Végezzük el ezt a felbontást  $X(T)$  összes antiprizma hiperlapja esetén és vegyük az így kapott teljes alakzat gömbi képét. Ekkor azt látjuk, hogy minden szabályos tetraéder tartománnyal négy trigonális piramis tartomány szomszédos (azaz közös 2-lapjuk van). Egyesítsük most ezeket a szabályos tetraéder tartományokat a velük szomszédos tartományokkal. Így az  $S^3$  gömb egy új tesszelációját kapjuk. Ez éppen  $X(H, T)$  gömbi képe. Maga a politóp a következőképpen rekonstruálható ebből. Vegyünk egy gömbi triakisztetraéder tartományt és fektessünk át a 6-odfokú csúcsain egy hipersíkot. Tegyük meg ezt az összes többi triakisztetraéder tartomány esetén. A gömbi tesszeláció fennmaradó tartományai egyenlő szárú háromszög alapú gúlák. Tetraéderekről lévén szó, ezek mindegyikének a csúcsain szintén átfektethetünk egy-egy egyértelműen meghatározott hipersíkot. Végül vegyük az összes olyan, az  $S^3$  gömböt tartalmazó zárt félteret, amelyet az ily módon elhelyezett hipersíkok határolnak. E félterek metszete az  $X(H, T)$  politóp.

$X(H, T)$  hiperlapjainak egyik típusát nyilván a triakisztetraéder képviseli. A másik típust az egyenlő szárú háromszög alapú gúlák jelentik, mivel egyszerű megfontolások alapján kizárható, hogy két ilyen gúla az euklideszi ősképp előállításakor egy nagyobb hiperlappá egyesüljön. Világos, hogy mindkét típus önmagában egy tranzitivitási osztályt is jelent.

Vizsgáljuk meg most az éltípusokat. A gúla hiperlapoknak a fenti konstrukció során alaplapjának tekintett lap olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja az  $X(T)$  politópban antiprizma alapél volt. Nevezzük ezt  $(TT)_B$  típusú élnek. A háromszög szára viszont antiprizma oldalél volt, így ezt  $(TT)_S$  típusú élnek fogjuk nevezni. Végül, a gúla oldalélének tekintett bármelyik él egy  $H$  és egy  $T$  típusú pontot köt össze (az  $X$  politópban), ezért ezt  $HT$  típusú élnek nevezzük. A 3 típus mindegyike egy tranzitivitási osztályt is jelent. A gúlának tehát mind a négy lapja egyenlő szárú háromszög.

Egy triakisztetraéder hiperlapnak 6  $(TT)_B$  típusú és 12  $HT$  típusú éle van.



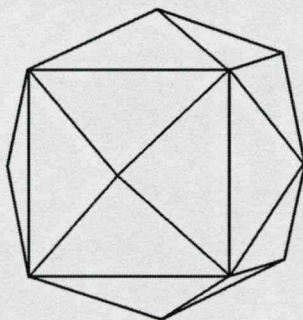
A megtalált 3 éltípuson kívül tehát nincs más. Az  $X(T)$  éleire megállapított fokszámok alapján  $X(H, T)$  éleire azt kapjuk, hogy a  $(TT)_B$ ,  $HT$  és  $(TT)_S$  típusú élek foka rendre 3, 4, illetve 8. A megfelelő élhosszúságok a 3.2. táblázat adataiból számítva:  $5\sqrt{2}/3$ ,  $\sqrt{2}$ , illetve  $2\sqrt{5}/3$ . Az  $f$ -vektort is meg tudjuk most már határozni:  $f(X(H, T)) = (40, 210, 300, 130)$ . Az orbit vektor:  $\theta(X(H, T)) = (2, 3, 3, 2)$ .

A perfektség a következőképpen látható be. Mivel az  $X(T)$  politóp perfekt, a  $T$  típusú csúcsok rendszerét rögzítettnek vehetjük. Mivel a  $H$  típusú csúcsok is nodálisak, egy ilyen csúcsot csak radiális irányban mozgíthatunk el a  $G(X(H, T))$  csoport hatásának megőrzése mellett. Másrészt, egy  $C$  középpontú triakisztetraéder hiperlap  $H$  (típusú) csúcsa csak  $CH$  irányban mozgítható el a triakisztetraéder szimmetriájának megőrzése mellett. A tekintett két irány nem esik egybe, ezért a  $H$  típusú csúcsok rendszere is rögzített,  $X(H, T)$  tehát perfekt.

Eredményeinket az alábbi tételben foglaljuk össze:

**4.5. Tétel.** *Az  $X(H, T)$  politóp nodális nem-Wythoff perfekt politóp. Szimmetriacsoportja:  $G(X(H, T)) = [[3, 3, 3]] \cong [3, 3, 3] \rtimes \langle \rho \rangle$ .  $f$ -vektora:  $f(X(H, T)) = (40, 210, 300, 130)$ . Orbit vektora:  $\theta(X(H, T)) = (2, 3, 3, 2)$ .*

Végül, a részletek kidolgozása nélkül, csupán utalunk itt arra a tényre, hogy perfekt nem-Wythoff politópok egy újabb egyedi típusa kapható annak alapján, hogy az  $X$  és  $Y$  politóp egymás szoros analogonja (ld. 3.3. alfejezet). A perfekt 48-cellából tehát a fentiekhez hasonlóan megszerkeszthetjük az  $Y(O, T)$  jelű perfekt politópot, amely  $X(H, T)$  analogonja.  $P^{(3)}$  ekkor a *tetrakiszhexaéder*, amely szintén egy (a geometriai kristálytanban jól ismert) laptranzitív poliéder (4.3. ábra).  $Y$  egy-egy hiperlapjába való befoglalása úgy történik, hogy 4-edfokú csúcsai az arkhimédieszi csonkított oktaéder nyolcszöglapjainak középpontjával, 6-odfokú csúcsai pedig a háromszöglap-középpontokkal esnek egybe.



4.3. ábra

## 5. Szeminodális perfekt 4-politópok

Ebben a fejezetben nem-Wythoff perfekt 4-politópok 5 különböző típusát konstruáljuk meg. Ezeknek a szerkezetét, különlegessége miatt, kissé részletesebben írjuk le, mint ahogy azt az előző fejezetekben tettük.

Ezek a politópok a következő értelemben is különlegesek. Az előző fejezetekben leírt összes perfekt  $P$  politóp olyan, hogy mind  $P$ , mind  $P^*$  nodális politóp, azaz kizárólag nodális csúcsokkal rendelkezik (2.13. Definíció). A perfektséggel kapcsolatos intuitív képnek kissé ellentmondó azt feltételezni, hogy egy  $P$  politóp úgy is perfekt lehet, hogy  $P$  és  $P^*$  egyaránt tartalmaz nullánál nagyobb szabadsági fokú csúcsokat. Az ilyen politópokra a [35] dolgozatban külön elnevezést vezettünk be:

**5.1. Definíció.** Egy  $P$  politópot *szeminodális politópnak* nevezünk, ha mind  $P$ , mind  $P^*$  csúcshalmazában előfordul olyan csúcs, amely nem nodális.

Az idézett dolgozatban még csak problémaként vetettük fel, hogy létezik-e szeminodális perfekt politóp. Hamarosan kiderült azonban, hogy a 4.1.1. Konstrukció lehetőséget ad ilyen politóp előállítására (Gévay, [36]). Az 5.1. alfejezetben ezt fogjuk leírni, a hátralevő alfejezetekben pedig 4 további típust ismertetünk.

### 5.1. Az $X(H, I)$ politóp

Az előző fejezetben leírt 4.1.1. Konstrukciót most úgy alkalmazzuk, hogy  $P^{(4)}$ -nek az  $X$  politópot (3.2. ábra),  $P^{(3)}$ -nak pedig a kockát választjuk.

Az (a)–(g) feltételekből ekkor következik, hogy egy befoglalt kocka váltakozó négy csúcsa a hatszöglapok középpontjaival esik egybe, a másik négy csúcs pedig a befoglaló cella belső pontja lesz. A kapott politóp hiperlapjainak egyik típusát itt is maga a  $P^{(3)}$  politóp szolgáltatja, tehát ez kocka lesz, minthogy a 4.1. alfejezetben a 4.2. Lemma alapján tett megfontolások itt is érvényesek. Ebből következően a politóp csúcshalmaza itt is megegyezik a befoglalt kockák csúcshalmazainak egyesítésével. A csúcsok kétféle helyzetének megfelelő két csúcsosztályt itt is  $V_B$ , illetve  $V_I$  szimbólummal fogjuk jelölni. Magának a politópnak a jelölésére az  $X(H, I)$  szimbólumot választjuk, amiben arra utalunk, hogy a két

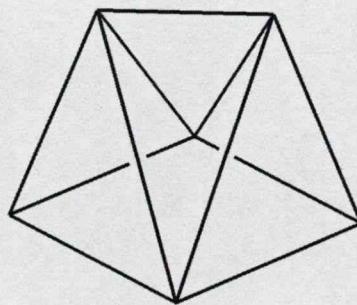


csúcsosztály  $X$  hexagonális lapközéppontjaiból, illetve a cellák belső pontjaiból áll.

A hiperlapok egy másik típusát a következőképpen határozzuk meg. A 3.3. alfejezetben megállapítottuk, hogy  $X$  egy csúcsának stabilizátora a  $[4, 2^+] \cong D_{2d}$  csoporttal izomorf. Válasszuk ki most  $X$ -nek egy  $V$  csúcsát és tekintsük azt a 4 kockacsúcsot, amely  $V$ -hez legközelebb esik. Megjegyezzük, hogy ez a pontnégyes a  $V_I$  osztályhoz tartozik, és mivel a  $V$  csúcson  $X$ -nek pontosan 4 cellája osztozik, mind a négy pont külön cellában helyezkedik el. Mivel e pontok elhelyezkedése az említett csoportnak megfelelő szimmetriát mutatja, a pontnégyes konvex burka egy tetragonális diszfenoid (megjegyezzük, hogy a tetragonális diszfenoid olyan csúcstranzitív 3-politóp, amelynek szimmetriacsoportja a  $D_{2d}$  kristálytani pontcsoport.)

Látni fogjuk, hogy az  $X$  csúcsai körül elhelyezkedő ilyen diszfenoidok képezik a második hiperlaptípust. E diszfenoidoknak az alakja a 3.2. táblázatban szereplő koordináták alapján pontosan meghatározható. Egyszerű számítás mutatja, hogy ha a kockákat egységkockának vesszük, akkor az egyenlő szárú háromszögek alapja  $\sqrt{2}/2$ , szára pedig  $\sqrt{6}/2$  hosszúságú.

Most meghatározzunk egy alakzatot, ami a harmadik hiperlaptípust fogja szolgáltatni. Abból az észrevételből indulunk ki, hogy  $X$  minden éle egy háromszöglap és két hatszöglap közös oldala. Válasszunk egy élet és tekintsük azt a két hatszöglapot, amelynek ez az él a közös oldala. Ezeknek a hatszögeknek a középpontjai az egyik befoglalt kocka egy  $L$  lapátlójának a végpontjait alkotják (ez a kocka abban a cellában helyezkedik el, amelyhez a két hatszöglap tartozik). Vegyük most azt a háromszöglapot, amelynek a kiszemelt él az oldalát alkotja és tekintsük azt az  $E$  rövidebbik diszfenoidélet, amely átdöfi a háromszöglapot. Számolással igazolható, hogy ez az él párhuzamos az  $L$  lapátlóval. Képezzük az  $L$ -t tartalmazó négyzetlapnak és  $E$ -nek a konvex burkát. A kapott poliédert az 5.1. ábra szemlélteti.



5.1. ábra



Könnyű észrevenni, hogy ennek az alakzatnak a  $G(X)$ -beli stabilizátora megegyezik  $X$  kiszemelt élének stabilizátorával, ami izomorf a  $C_{2v} \cong [2]$  csoporttal. Ugyanez a csoport egyúttal szimmetriacsoportja is az illető poliédernek.

Az előzőleg kapott diszfenoid, az imént előállított újabb alakzat, valamint ezek ekvivalens példányainak az  $X$  egy cellája környezetében elfoglalt kölcsönös helyzetének vizsgálatából megállapítható, hogy ezek – a kocka mellett – az  $X(H, I)$  politóp két másik hiperlaptípusát képviselik. A kocka, a diszfenoid, illetve a harmadikként megtalált hiperlapok stabilizátora az  $X$  politóp rendre egy-egy 3-, 0-, illetve 1-dimenziós lapjának stabilizátorával esik egybe, így e lapokat  $F_3$ ,  $F_0$ , illetve  $F_1$  típusú hiperlapoknak fogjuk nevezni.

Megjegyezzük, hogy mivel a konstrukció során  $X$  szimmetriája természetes módon megőrződik, azaz  $G(X) = G(X(H, I))$ , a továbbiakban nem teszünk különbséget e csoport kétféle felfogása között.

Megfigyelhető, hogy egy  $F_1$  típusú hiperlap negyedfokú csúcsai ugyanahhoz a tranzitivitási osztályhoz tartoznak. Ez az osztály egybeesik a  $V_I$  csúcsosztállyal. A fennmaradó két (harmadfokú) csúcs pedig a  $V_B$  osztályhoz tartozik, ami az  $X(H, I)$  politóp csúcsainak másik tranzitivitási osztályát képezi.

Ebből az is következik, hogy az illető hiperlap hat háromszöglapjának mindegyike egyenlő szárú háromszög. E háromszöglapok közül az a kettő, amelyeknek szárszöge kisebb, egy-egy diszfenoid hiperlappal közös. Másrészt, szimmetriamegfontolások alapján megmutatható, hogy a nagyobbik szárszöggel rendelkező háromszöglapokon keresztül mindenütt két-két  $F_1$  típusú hiperlap csatlakozik egymáshoz. A kétféle háromszöglap a négyzetlappal együtt  $X(H, I)$  2-lapjainak tranzitivitási osztályait képezik.

Megemlítünk itt egy érdekes véletlen egybeesést. A *Handbook of Discrete and Computational Geometry* c. könyv [41] borítóján egy olyan poliéder ábrája szerepel, amely szimmetria-ekvivalens (sőt csaknem megegyezik) az 5.1. ábrán feltüntetett poliéderrel (ld. Melléklet, M.1. ábra). Ez azonban a könyv 13. fejezetében [48] szereplő egyik poliéder egy változatát ábrázolja, amelynek nincs köze a mi  $X(H, I)$  politópunkhoz, így az egybeesés csakugyan a véletlen műve [42].

$X(H, I)$  éleire az előbbi skálázást használva, megfigyelhetjük, hogy az előforduló élhosszúságok, nevezetesen  $\sqrt{2}/2$ , 1 és  $\sqrt{6}/2$ , egyúttal az élek tranzitivitási osztályait is meghatározzák. Nem nehéz megállapítani, hogy a megfelelő élek foka rendre 6, 4, illetve 3 (a legrövidebb él mentén váltakozva 3 diszfenoid és 3  $F_1$  típusú hiperlap találkozik, egy egységnyi hosszúságú él pedig 1 kocka és 3  $F_1$  típusú hiperlap közös éle). Egy  $V_I$  osztályhoz tartozó csúcs 1 kocka, 3 diszfenoid és 6  $F_1$  típusú hiperlap metszete, a  $V_B$  osztályhoz tartozó csúcsokban pedig 2 kocka és 6  $F_1$  típusú hiperlap találkozik.

A tranzitivitási osztályok birtokában az orbit vektor könnyen meghatározható:  $\theta(X(H, I)) = (2, 3, 3, 3)$ . Mivel az orbit vektornak mind az 1, mind a 4. komponense különbözik nullától, sem  $X(H, I)$ , sem a polárisa nem Wythoff-politóp. Az  $f$ -vektor szintén könnyen adódik:  $f(X(H, I)) = (60, 260, 300, 100)$ ; az  $F_0$ ,  $F_1$  és  $F_3$  típusú hiperlapok száma rendre 30, 60, illetve 10.

Politópunk perfektségét a 4.1. alfejezetben leírt módon, a 4.1.2. Konstrukcióval analóg konstrukció segítségével igazolhatjuk. A kiindulásul szolgáló  $P_0$  politóp itt is a  $V_B$  osztály konvex burkaként adódik. Ez a politóp nem más, mint a 3.3. alfejezetben konstruált  $t_{0,3} \alpha_4$  perfekt Wythoff-politóp. A szabályos tetraéder hiperlapok a második lépésben  $X(H, I)$  kocka hiperlapjaivá egészítendők ki.

$X(H, I)$  továbbá szeminodális is, amit a következőképpen láthatunk be. A  $V_I$  osztályba tartozó valamennyi csúcs egy olyan ív relatív belső pontja, amely  $X$  egy cellájának középpontját a cella egy háromszöglapjának középpontjával köti össze. Egy ilyen pont helyzetét a  $G(X) = G(X(H, I))$  csoport szimmetriaállványzatában megvizsgálva azt találjuk, hogy szabadsági foka 1. Másrészt, az előbb láttuk, hogy egy  $F_1$  típusú hiperlap stabilizátora izomorf a  $C_{2v} \cong [2]$  csoporttal. Ennek a csoportnak a fixponthalmaza 1-dimenziós. Ebből következik, hogy az illető hiperlapnak megfelelő csúcs a  $X(H, I)$  polárisában 1 szabadsági fokkal rendelkező pont.  $X(H, I)$  tehát eleget tesz a szeminodalitás definíciójában szereplő mindkét feltételnek.

Az  $X(H, I)$  politópról nyert néhány fontosabb eredményünket az alábbi tételben foglaljuk össze (Gévay, [36]):

**5.2. Tétel.** *Az  $X(H, I)$  politóp, amelyet az  $X$  perfekt 10-cellából a 4.1.1. Konstrukcióval kaptunk, perfekt és szeminodális. Szimmetriacsoportja:  $G(X(H, I)) = [[3, 3, 3]] \cong [3, 3, 3] \rtimes \langle \rho \rangle$ .  $f$ -vektora:  $f(X(H, I)) = (60, 260, 300, 100)$ . Orbit vektora:  $\theta(X(H, I)) = (2, 3, 3, 3)$ .*

## 5.2. Az $Y(O, I)$ politóp

Az  $X(H, I)$  politóp egy analogonját nyerjük, ha az előző konstrukcióban  $X$  helyett az  $Y$  politópból indulunk ki (ld. 3.4. ábra), és  $P^{(3)}$ -nak rombdodekaédert választunk. Ekkor egy befoglalt rombdodekaéder negyedfokú csúcsai a befoglaló cella nyolcszöglapjainak középpontjaival esnek egybe ( $V_B$  osztály), a harmadfokú csúcsok pedig a cella belsejébe esnek ( $V_I$  osztály). Ezért ezt a politópot az  $Y(O, I)$  szimbólummal fogjuk jelölni.

Az  $Y(O, I)$  politóp  $F_3$  típusú hiperlapjai tehát rombdodekaéderek lesznek, az  $F_0$  típusú hiperlapok itt is (tetragonális) diszfenoidok. Az  $F_1$  típusú hiperlapok szimmetria-ekvivalensek az  $X(H, I)$  politóp  $F_1$  típusú hiperlapjaival, csak éppen a négyzetlapok helyett itt a rombdodekaéderek rombuszlapjai szerepelnek. A rombuszlappal párhuzamos él a rombusz hosszabbik átlójával párhuzamos. A szimmetria itt is megőrződik a konstrukció során, tehát  $Y(O, I)$  szimmetriacsoportja  $[[3, 4, 3]] \cong [3, 4, 3] \rtimes \langle \rho \rangle$ .

A különböző típusú lapok tranzitivitási osztályai szintén analóg módon adódnak. Az orbit vektor tehát ugyanaz:  $\theta(Y(O, I)) = (2, 3, 3, 3)$ . Az élek fokszámai megegyeznek  $X(H, I)$  megfelelő éleinek fokszámaival. Minden csúcs 10 hiperlap metszete; a  $V_I$  osztályba tartozó csúcsokban itt is 3  $F_0$ , 6  $F_1$  és 1  $F_3$  típusú hiperlap található, egy  $V_B$  osztályba tartozó csúcs azonban 8  $F_1$  és 2  $F_3$  típusú hiperlap metszete. Az  $f$ -vektor:  $f(Y(O, I)) = (528, 2496, 2880, 912)$ . Végül pedig politópunk perfekt és szemínodális.

### 5.3. Az $X(I, T)$ politóp

Az ebben az alfejezetben ismertetett konstrukció Gévay és Miyazaki [39] dolgozatából származik.

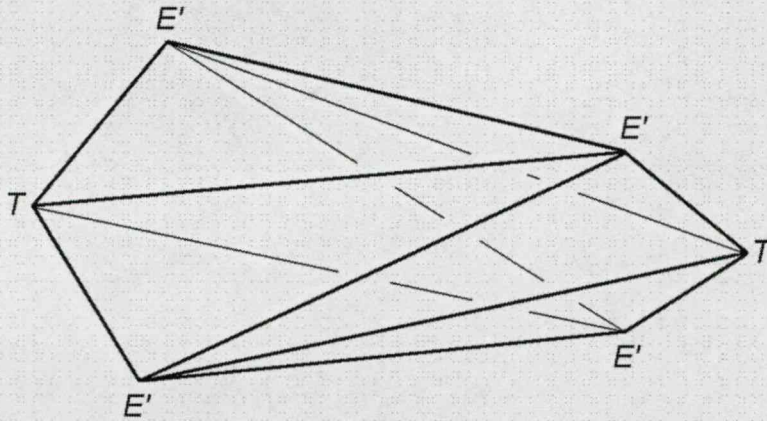
Most ismét az  $X$  politópból fogunk kiindulni, és a konstrukció leírásában a 3.2. ábra jelöléseire fogunk hivatkozni. Válasszunk egy csúcsot, legyen ez mondjuk  $V_{27}$ , és tekintsük azt a két háromszöglapot, amelyeknek ez a közös csúcsa. Jelölje a háromszögek középpontját  $T_{34}$ , illetve  $T_{57}$ , ahol az index azt a két cellát jelzi, amelyek osztoznak az illető háromszöglapon. Legyen  $G_T$  a  $(T_{34}, T_{57})$  pár súlypontja. Vegyük a  $V_{27}$  csúcsból kiinduló 4 élet. Jelölje ezek felezőpontját  $E_{345}$ ,  $E_{347}$ ,  $E_{357}$ , illetve  $E_{457}$ , ahol az index szintén az illető élhez csatlakozó cellákra utal. Legyen  $G_E$  ennek a pontnégyesnek a súlypontja. Némi számolás (a 3.2. táblázatban szereplő koordináták alapján) azt mutatja, hogy  $G_T$  és  $G_E$  nem esik egybe. Mindketten rajta vannak azonban az  $X$  politóp  $O$  középpontját a  $V_{27}$  csúccsal összekötő egyenesen. Ez a  $V_{27}$  körüli lokális szimmetria következménye. (Kissé konkrétan:  $V_{27}$  stabilizátorának, ami a  $[4, 2^+] \cong D_{2d}$  csoporttal izomorf, fixegyenes az  $OV_{27}$  egyenes.) Azt szeretnénk, hogy a két súlypont egybeessen. Ennek érdekében az  $E_{ijk}$  pontok mindegyikét alkalmas mértékben eltoljuk egy  $\vec{EC}$  vektorral párhuzamos irányban ( $\vec{EC}$  vektoron egy  $E$  típusú pontot egy  $C$  típusú ponttal, azaz cellaközépponttal összekötő vektort értünk). Ekkor ezek a pontok egy-egy cella belsejébe kerülnek, egy  $E'_{ijk}$  új pozícióba. Egy  $E_{ijk}$  ponthoz azt az  $i$ -edik cellát választjuk, amelynek a határa nem tartalmazza a  $T_{jk}$  pontot.



Emellett, a szimmetria megőrzése érdekében, az eltolás mértéke mindegyik pontra ugyanakkora.

Mármost világos, hogy az  $(E_{345}, E_{347}, E_{357}, E_{457})$  pontnégyes egy tetraéder csúcshalmazát képezi, közelebbről, egy tetragonális diszfenoidét. Ugyanez igaz az  $(E'_{345}, E'_{347}, E'_{357}, E'_{457})$  pontnégyesre. Továbbá, ez utóbbi pontnégyes és a  $T_{34}$ , valamint  $T_{57}$  pont ugyanabban a hipersíkban van. Valóban, ez az a hipersík, amely a  $V_{27}$  csúcs stabilizátorára nézve invariáns és amely átmegy a  $G_T$  ponton, valamint a  $G_T$ -vel egybeeső új  $G'_E$  súlyponton. Számolással ellenőrizhető, hogy az  $E'_{345}$ ,  $E'_{347}$ ,  $E'_{357}$  és  $E'_{457}$  pontok, amelyek súlypontja teljesíti a  $G'_E = G_T$  feltételt, csakugyan a megfelelő cellák belsejében helyezkednek el. A számolásból másrészt az is kiderül, hogy  $T_{34}$  és  $T_{57}$  a szóban forgó pontnégyes konvex burkán kívülre esik.

Ez utóbbi feltételt egybevetve azzal, hogy a hat pont elhelyezkedésének szimmetriáját a  $D_{2d}$  csoport írja le, megállapíthatjuk, hogy ennek a ponthatosnak a konvex burka egy *tetragonális szkalenoéder*. A tetragonális szkalenoéder 8 egybevágó általános háromszög által határolt laptranzitív poliéder. Szimmetriacsoportja éppen a 8-adrendű  $D_{2d}$  csoport. Kristályformaként ismert a geometriai kristálytanban [8, 54, 55]. Kombinatorikusan ekvivalens a szabályos oktaéderrel. Az 5.2. ábra a konstrukció során kapott konkrét szkalenoédernek *Maple* segítségével szerkesztett képét mutatja.



5.2 ábra

Konstruáljunk meg most egy szkalenoédert a leírt módon  $X$  minden egyes csúcsa körül, majd vegyük az így kapott teljes alakzat konvex burkát. Az így előállított politópot  $X(I, T)$ -vel fogjuk jelölni.

Látni fogjuk, hogy  $X(I, T)$  hiperlapjainak egyik típusát a konstrukcióban szereplő szkalenoéderek alkotják. Most meghatározzuk a többi hiperlaptípust.

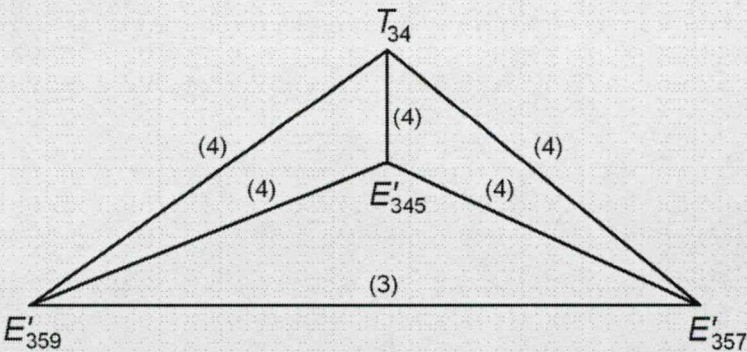
Ehhez tekintsük először az  $E$  típusú pontok eltolásával kapott  $E'$  típusú pontokat. Vegyünk ezekből 6 olyat, amely  $X$  egy hatszöglapja élfelezőpontjainak eltolásával keletkezett. Mivel egy ilyen hatszöglap stabilizátora a  $D_{3d}$  csoporttal izomorf, látható, hogy ennek a hat pontnak a konvex burka egy trigonális antiprizma. Ilyen antiprizma minden egyes hatszöglap közvetlen környezetében megkonstruálható, és látni fogjuk, hogy ezek szintén egy hiperlaptípust alkotnak.

Vegyünk most 6 olyan  $E'$  típusú pontot és 4 olyan  $T$  típusú pontot, amelyek mindegyike  $X$  ugyanazon cellájához tartozik. A cella szimmetriája alapján e 10 pont konvex burkának az alakját a következőképpen találhatjuk meg. Tekintsük azt a szabályos oktaédert, amelynek a csúcsai éppen az  $E'$  típusú pontok és vegyük ennek váltakozó négy lapját. Ragasszunk mind a négy lapra olyan trigonális piramisokat, amelyek apikális csúcsa egy-egy  $T$  típusú ponttal esik egybe (egyszerű számítás mutatja, hogy ekkor konvex testet kapunk). Az így kapott poliéderrel kapcsolatban egyelőre itt is megelőlegezzük az állítást, hogy ez  $X(I, T)$  egy újabb hiperlaptípusát képviseli. Hogy alkalmas elnevezést is találjunk ennek a poliédernek, abból indulunk ki, hogy a geometriai kristálytanban jól ismert az a poliédertípus (kristályforma), amelyet a szabályos oktaéderből úgy kapunk, hogy mind a nyolc lapjára trigonális piramisokat ragasztunk (ezek magassága elegendően kicsi ahhoz, hogy konvex testet kapjunk, és hogy ez ne a szabályos tetraéder legyen). Mivel ennek a kristályformának a neve *triakiszoktaéder*, az általunk konstruált poliédertípust *szemi-triakiszoktaédernek* fogjuk nevezni.

Megfigyelve a konstrukció során kapott poliéderek kölcsönös helyzetét, azt találjuk, hogy mindhárom fajtának van olyan háromszöglapja, amely semelyik kettőnek nem közös lapja. Valóban, a szkalenoédert  $E'E'T$  típusú lapok határolják, amelyek általános háromszögek; az antiprizma oldallapjai  $E'E'E'$  típusú egyenlő szárú háromszögek; a szemi-triakiszoktaéder háromszöglapjai pedig  $E'E'T$  típusú egyenlő szárú háromszögek. Az eddig talált poliéderek között tehát „hézagok” vannak, és az ezeket a hézagokat kitöltő poliéderek fogják éppen szolgáltatni a negyedik és egyben utolsó hiperlaptípust. Valóban, képezzük a konvex burkát pl. az  $(E'_{357}, E'_{359}, E'_{345}, T_{34})$  pontnégyesnek. Ez egy tükörszimmetrikus tetraéder, és közvetlenül ellenőrizhető a 3.2. ábrán, hogy lapjai éppen az említett típusú háromszögek. Általános háromszög alakú lapjain keresztül 2 különböző szkalenoéderhez csatlakozik. Az általa meghatározott hipersík a szkalenoédereket tartalmazó egyik hipersíkkal sem esik egybe. Ekkor ugyanis, szimmetriakoknál fogva, mindhárom hipersík egybeesne, ami nem lehetséges.  $E'E'E'$  és  $E'E'T$  típusú lapján antiprizmával, illetve szemi-triakiszoktaéderrel osztozik. A tetraéder és e két utóbbi poliéder mindegyike szintén három különböző hipersíkhhoz tartozik, mivel hármójuk közös élének foka 3, ami nem csökkenthető konvexitási, illetve szimmetriafeltételek megsértése nélkül.



Azt kaptuk tehát, hogy 4 különböző típusú poliéderünk van. Megfontolásainkból következik, hogy két különböző poliéder sehol sem eshet ugyanabba a hipersíkba. Másrészt, a metszetük sem lehet egy közös 2-lapnál bővebb halmaz. Ezek a poliéderek tehát valóban hiperlapjai a  $X(I, T)$  politópnak, mint azt előzőleg már jeleztük. A típusok egyben tranzitivitási osztályt is jelentenek. A különböző típusú hiperlapok száma könnyen kiszámítható  $X$   $f$ -vektorából. Nevezetesen, 10 szemi-triakiszoktaéder, 20 antiprizma, 30 szkalenoéder és 120 tetraéder hiperlapunk van.



5.3. ábra

TÍPUS	FOKSZÁM	CSATLAKOZÓ HIPERLAPOK	ELŐFORDU- LÁSI SZÁM	HOSSZÚSÁG
$TE'$	4	2 szkalenoéder 2 tetraéder	60	$\frac{\sqrt{70}}{18} \approx 0,4648$
$TE'$	4	1 szkalenoéder 1 szemi-triakiszoktaéder 2 tetraéder	120	$\frac{5\sqrt{22}}{18} \approx 1,3029$
$E'E'$	4	1 szkalenoéder 1 antiprizma 2 tetraéder	120	$\frac{\sqrt{105}}{9} \approx 1,1386$
$E'E'$	3	1 szemi-triakiszoktaéder 1 antiprizma 1 tetraéder	120	$\frac{25\sqrt{2}}{18} \approx 1,9642$

5.1 táblázat



Az egyes hiperlaptípusok tranzitivitási tulajdonságait figyelembe véve a 2-lapok tranzitivitási osztályai is meghatározhatók. Azt találjuk, hogy ezekből szintén 4 van: a háromszöglapok fent már említett három típusa, a negyedik pedig a szemi-triakiszoktaéderek szabályos hatszöglapjaiból áll.

Az élek ugyancsak 4 tranzitivitási osztályt képeznek. Ezek típusai és fokai az 5.3. ábrán láthatók, amely az egyik tetraéder hiperlap Schlegel-diagramját ábrázolja. További adatok az 5.1. táblázatban találhatók. Az élhosszúságokat a 3.2. táblázatban szereplő koordinátákból kaptuk.

**5.3. Tétel.** *Az  $X(I, T)$  politóp perfekt és szeminodális. Szimmetriacsoportja:  $[[3, 3, 3]] \cong [3, 3, 3] \rtimes \langle \rho \rangle$ .  $f$ -vektora:  $f(X(I, T)) = (80, 420, 520, 180)$ . Orbit vektora:  $\theta(X(I, T)) = (2, 4, 4, 4)$ .*

*Bizonyítás.* A perfektség belátásához először vegyük azt a (4.3. alfejezetben már említett)  $X(T)$  politópot, amely  $X(I, T)$   $T$  típusú csúcsai halmazának konvex burkaként áll elő. Mivel  $X(T)$  csúcstranzitív és nodális, a 2.14. Tétel szerint perfekt. Másrészt  $G(X(T)) = G(X(I, T))$ . Ebből következik, hogy a tekintett csúcshalmaz rögzített abban az értelemben, hogy elemeinek elrendezése nem változtatható meg a halmaz szimmetriatulajdonságainak megváltozása nélkül.

Most vizsgáljuk meg, megváltoztathatjuk-e az  $E'$  típusú csúcsok helyzetét  $X(I, T)$  szimmetriatípusának megőrzése mellett. Világos, hogy ez csak úgy történhet, hogy a szkaloenoéder hiperlapok szkaloenoéderek maradnak. Mivel e szkaloenoéderek  $T$  típusú csúcsai rögzítettek, az egyik lehetőség, hogy a két átellenes  $T$  típusú csúcsukat összekötő tengely körül elforgatjuk őket. Ekkor azonban az  $E'$  típusú csúcsok, amelyek eredetileg illeszkedtek az  $X$  politóp celláinak szimmetriasíkjaira (a 3.3. ábrán pl. az egyik  $ECV$  sík), most elhagyják azokat, és így a tükörszimmetria miatt megkettőződnek. Ezért ez a változtatás nem lehetséges.

A másik lehetőség, hogy a szkaloenoéderek alakját (a saját szimmetriatípusuk megőrzése mellett) megváltoztatjuk úgy, hogy az  $E'$  típusú csúcsok továbbra is a szimmetriasíkokon maradnak.  $G(X(I, T))$  szimmetriaállványzatának leírásából látszik, hogy e csúcsok szabadsági foka (a gömbi képben tekintve) 1. Közelebbről, az  $X$  politóp celláin belül, egy-egy  $CE$  típusú szakasz relatív belsejére korlátozódhat a mozgásuk. Ez a fajta elmozdulás azonban szintén nem megengedett. Ekkor ugyanis, ha egy  $V$  típusú csúcs 4 legközelebbi  $E'$  típusú szomszédait vesszük, egy ilyen pontnégyes súlypontja nem fog többé egybeesni az ugyanehhez a szomszédsághoz tartozó  $T$  típusú pontpár súlypontjával. Ez azt jelenti, hogy a szóban forgó 6 pont nem fog szkaloenoédert képezni. (Ez  $X(I, T)$  konstrukciójából következik: az  $E'$  pontok helyzetét a kétféle súlypont egybeesésének feltétele alapján találtuk meg, és az ennek kapcsán adódó egyenlet egyetlen megoldást szolgáltatott.)

A gömbi képet elhagyva, az  $E'$  típusú pontok olyan elmozdulását is meg kell vizsgálnunk, amikor az euklideszi térben  $X(I, T)$  középpontja felé toljuk el őket,  $E''$  pozícióba. Alkalmas mértékű eltolással (úgy, hogy közben a gömbi képben a  $CE$  íven belül is elmozdulás történik) szintén kaphatunk szkalenoédereket. Az így kapott  $E''$  pontok azonban  $X$  egy celláján belül olyan ponthatost fognak képezni, melynek súlypontja nem esik egybe az ugyanezen cella négy  $T$  típusú pontjának súlypontjával. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben nem kapunk szemi-triakisz-oktaéder alakú hiperlapokat. Tehát ez az elmozdulás sem megengedett.

A szeminodalitás bizonyításához elegendő azt megállapítanunk, hogy mind az  $X(I, T)$  politópnak, mind pedig a polárisának vannak nemnodális csúcsai. Valóban, az  $E'$  típusú csúcsok nem nodálisak. Másrészt, vegyük figyelembe, hogy egy  $P$  politóp  $P^*$  polárisának egy  $V$  csúcsa akkor és csak akkor nodális, ha  $P$  megfelelő hiperlapjának normálvektora nódusra mutat. Mármost közvetlenül látható, hogy  $X(I, T)$  tetraéder hiperlapjának normálvektora semmilyen nódusra mutató vektorral nem esik egybe.

A lapok tranzitivitási osztályait már fentebb meghatároztuk, tehát az orbit vektor komponenseit ismerjük, és ezek alapján egyszerű feladat az  $f$ -vektor kiszámítása.

Végül, a szimmetriacsoport megállapításához elegendő azt észrevennünk, hogy a konstrukció módja megőrzi  $X$  szimmetriáját. ■

## 5.4. Az $Y(I, T)$ politóp

$X$  helyett a perfekt 48-cellából kiindulva, az előbbi konstrukció alkalmazásával  $X(I, T)$  egy analogonját nyerjük, amelyet  $Y(I, T)$ -vel jelölünk (vö. 3.4. ábra). A szoros rokonság miatt itt csak néhány fontosabb tulajdonságot említünk meg.  $Y$  288 csúcsa körül ugyanennyi szkalenoédert tudunk konstruálni. Számítással ellenőrzött (a 3.3. táblázat koordinátái alapján), hogy ezek csakugyan léteznek. Mivel a kiindulási politópban hatszöglapok helyett itt szabályos nyolcszöglapok vannak, a hiperlapok következő típusa tetragonális antiprizma. Ezekből 144 van.

A  $C$  típusú súlyponttal rendelkező 48 hiperlapot a következőképpen kapjuk. A 12  $E'$  típusú pont  $Y$  egy celláján belül (amely arkhimédeszi csonkított kocka) egy kuboktaéder csúcshalmazát képezi. Hozzávéve a 8  $T$  típusú pontot, majd ennek a bővebb halmaznak a konvex burkát képezve a kuboktaéder a háromszöglapjaira ragasztott trigonális piramisokkal bővül. Számítással igazolható, hogy az így kapott test konvex poliéder. Végül, a negyedik hiperlaptípust itt is tükörszimmetrikus tetraéderek alkotják. Ezek száma 1152.



A 2-lapoknak szintén 4 tranzitivitási osztálya van; az egyetlen lényeges különbség itt az, hogy az antiprizmák alaplapjai háromszögek helyett négyzetek. Az élstruktúra is teljesen analóg az  $X(I, T)$  politópéval. Ennek adatait az 5.2. táblázat tartalmazza.

TÍPUS	FOKSZÁM	CSATLAKOZÓ HIPERLAPOK	ELŐFORDU- LÁSI SZÁM	HOSSZÚSÁG
$TE'$	4	2 szkalenoéder 2 tetraéder	576	$\frac{\sqrt{14-8\sqrt{2}}}{6} \approx 0,2732$
$TE'$	4	1 szkalenoéder 1 $C$ típusú hiperlap 2 tetraéder	1152	$\frac{\sqrt{14+8\sqrt{2}}}{6} \approx 0,8386$
$E'E'$	4	1 szkalenoéder 1 antiprizma 2 tetraéder	1152	$\frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,7454$
$E'E'$	3	1 antiprizma 1 $C$ típusú hiperlap 1 tetraéder	1152	$\frac{\sqrt{4+3\sqrt{2}}}{6} \approx 1.3738$

5.2. táblázat

Végül, az előbbihez hasonló tétel itt is érvényes, és teljesen analóg módon bizonyítható:

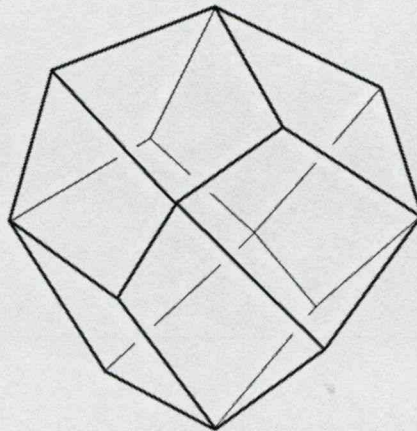
**5.4. Tétel.** Az  $Y(I, T)$  politóp perfekt és szeminodális. Szimmetriacsoportja:  $[[3, 4, 3]] \cong [3, 4, 3] \rtimes \langle \rho \rangle$ .  $f$ -vektora:  $f(Y(I, T)) = (768, 4032, 4896, 1632)$ . Orbit vektora:  $\theta(X(I, T)) = (2, 4, 4, 4)$ .



### 5.5. Az $X(H, I, T)$ politóp

Most olyan szeminodális politópot konstruálunk (Gévay és Miyazaki, [39] alapján), aminek jellemző hiperlapja *deltoid-dodekaéder* lesz. A deltoid-dodekaéder laptranzitív poliéder, amelyet 12 deltoidlap határol (5.4. ábra). A geometriai kristálytanban mint kristályforma ismeretes [8, 54, 55]; ezenkívül előfordul pl. a 4-dimenziós kocka 3-dimenziós perspektív képében [38]. Szimmetriacsoportja megegyezik a szabályos tetraéder szimmetriacsoportjával. Csúcsai az alábbi 3 tranzitivitási osztályba sorolhatók:

- 1. típusú csúcsok. Ez 3-adfokú csúcsok olyan halmaza, amelynek konvex burka egy szabályos tetraéder. E tetraéder köré írt gömb sugarát  $r_1$ -gyel fogjuk jelölni;
- 2. típusú csúcsok. Ezek a 4-edfokú csúcsok. E csúcshalmaz konvex burka egy szabályos oktaéder, amely köré írt gömb sugara  $r_2 > r_1$ ;
- 3. típusú csúcsok. Ez 3-adfokú csúcsok olyan halmaza, amelynek konvex burka egy az előbbinél nagyobb méretű szabályos tetraéder. Körülírt gömbjének sugara  $r_3 > r_2$ .



5.4. ábra

A deltoid-dodekaéder, bár nodális, de nem perfekt politóp, mivel a diéderes szögei változhatnak úgy, hogy a szimmetriatípusa megőrződik. Ennek megfelelően, az  $r_1:r_2:r_3$  arány szintén változhat bizonyos korlátokon belül.

Vegyünk most egy alkalmas  $r_1:r_3$  aránnyal rendelkező deltoid-dodekaédert és illesszük egy-egy példányát a perfekt 10-cella minden egyes cellájába úgy, hogy a következő feltétel teljesüljön:

**5.5. Feltétel.** Az 1. típusú csúcsok  $H$  típusú pontokkal, a 3. típusú csúcsok pedig  $T$  típusú pontokkal esnek egybe.

Egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy ilyen deltoid-dodekaéder létezik, és pedig az  $r_1:r_2:r_3 = 3 : \frac{5\sqrt{3}}{2} : 5$  arány teljesülése esetén. Az 5.5. feltételből továbbá az alábbi tulajdonság következik:

**5.6. Tulajdonság.**

- (1) Minden 2. típusú csúcs egy a cella középpontját egy élfelezőponttal összekötő szakasz relatív belsejében helyezkedik el (azaz, egy  $CE$  szakaszon).
- (2) Pontosán egy olyan  $r_1:r_2:r_3$  arány létezik, amelyre a 5.5. feltétel teljesül, tehát a befoglalt deltoid-dodekaéder alakja egyértelműen meghatározott.

Végül, vegyük az így elhelyezett 10 deltoid-dodekaéderből álló alakzat konvex burkát.

Látható, hogy a most leírt konstrukció tulajdonképpen a 4.1.1. Konstrukció egy módosított alkalmazása. Nevezetesen, elvetettük a (c) feltételt, az (f) feltételben a tranzitivitási osztályok számát 3-ra emeltük, a (g) feltételt pedig ezek közül 2 osztály teljesíti.

Belátható (úgy, ahogy azt már több hasonló esetben a 4.2. Lemmára támaszkodva tettük), hogy a konstrukció eredménye egy olyan 4-politóp, amelynek deltoid-dodekaéderek a hiperlapjai. Ezért ezt a politópot *deltoid-dodekahedrális perfekt politópnak* fogjuk nevezni. Jelölésére az  $X(H, I, T)$  szimbólumot alkalmazzuk.

Most meghatározzuk a hiperlapok további típusait. Ehhez először vegyük figyelembe, hogy konstrukciónkban az alábbi 3 különböző ponttípus jut szerephez:

- $T$  típusú pontok;
- $H$  típusú pontok;
- $E'$  típusú pontok, ahol az  $E'$  jelölést az 5.6. (1) feltételnek eleget tevő pontokra fogjuk alkalmazni.

Vegyünk most két  $T$  típusú pontot és négy  $E'$  típusú pontot az  $X$  politóp egy  $V$  csúcsa környezetében. Mint korábban láttuk, a  $V$  körüli  $D_{2d}$  lokális szimmetria azt eredményezi, hogy az  $E'$  pontnégyes egy tetraéder, egészen pontosan, *rombos diszfenoid* csúcshalmazát alkotja (a rombos diszfenoid laptranzitív tetraéder, melynek lapjai általános háromszögek). Némi számolás nyomán azonban kijelenthetjük, hogy ez a diszfenoid nem jelenhet meg  $X(H, I, T)$  hiperlapjaként. Ugyanis azt kapjuk, hogy az  $E'$  pontnégyes súlypontja közelebb van  $X$  középpontjához, mint a  $T$  pontpár súlypontja, és ebből már következik az állításunk. Abból, hogy a két súlypont nem esik egybe, az is következik, hogy a

szóban forgó hat pont szkalenoéder hiperlapot sem képezhet. Azt találjuk, hogy a lokális szimmetria által kirótt feltételek alapján ebből a hat pontból egyedül a következő módon lehet hiperlapokat képezni. Vegyük a két  $T$  típusú pontot és vegyünk hozzá két olyan  $E'$  típusú pontot, amely  $X$  két egymással szomszédos cellájában helyezkedik el. E pontnégyes konvex burka nyilván egy tetraéder, és a  $D_{2d}$  stabilizátor pontosan négy ilyen tetraédert permutál. (Megjegyezzük, hogy egy ilyen tetraédernégyest úgy is elő lehetne állítani, hogy egy szkalenoédert – mint ami  $X(I, T)$  konstrukciójában szerepelt – négy egybevágó tetraéderre bontunk fel úgy, hogy az így kapott elrendezés megőrizze az eredeti szimmetriát. A tetragonális szkalenoéder felbontásának feladata az adott szimmetriafeltétel mellett egyértelmű megoldáshoz vezet.) Megfigyelhető, hogy a kapott tetraéder félfordulatra nézve szimmetrikus, és nincs is más szimmetriája. A megfelelő másodrendű forgástengely éppen az, amit a 3.3. ábrán szaggatott vonal jelöl. Szimmetria-megfontolások alapján megmutatható, hogy ezek a tetraéderek az  $X(I, T)$  politópnak hiperlapjai.

Vegyünk most egy deltoidlapot, legyen ez pl.  $T_{34}E'_{359}H_{35}E'_{357}$  (az indexelés ugyanúgy történik, mint az 5.3. alfejezetben). Ez annak a deltoid-dodekaédernek egy lapja, amely az  $X$  politóp III. cellájában helyezkedik el. A  $H_{35}$  csúcson osztozik az V. cellában levő szomszédos deltoid-dodekaéderrel. Ennek a második dodekaédernek a szóban forgó deltoidlaphoz legközelebb levő csúcsa  $E'_{345}$ . A deltoidlapnak és ez utóbbi pontnak a konvex burka egy gúla, amelyről megmutatható, hogy a hiperlapok harmadik és egyben utolsó típusát képviseli. Ennek a gúlának az  $E'_{345}E'_{357}H_{35}$  oldallapja közös egy másik deltoid alapú gúlával. Sőt észrevehető, hogy a  $H_{35}$  csúcs 6 ilyen gúlának a közös csúcsa; ennek a 6 gúlából álló elrendezésnek a stabilizátora ugyanaz, mint magának a  $H_{35}$  csúcsnak, vagyis izomorf a  $D_{3d}$  csoporttal. A gúla egy másik egy másik típusú oldallapja, nevezetesen a  $E'_{345}E'_{357}T_{34}$  lap, a  $E'_{345}E'_{357}T_{34}T_{57}$  tetraéderrel közös.

Tehát a hiperlapoknak 3 típusa és egyben tranzitivitási osztálya van. Az egyes osztályok: 10 deltoid-dodekaéder, 120 négyoldalú gúla és 120 tetraéder.

A 2-lapok 3 típusának egy-egy reprezentánsát már említettük. Van egy negyedik típus is:  $ETT$ . Egy ilyen háromszög két tetraéder közös lapja. A négy típus szintén tranzitivitási osztályt is jelent. Egy említésre méltó érdekesség, hogy a deltoidlapok  $T$  típusú csúcsánál levő szög éppen derékszög.

Az élek tranzitivitási osztályainak adatait az 5.3. táblázat tartalmazza.

**5.7. Tétel.** Az  $X(H, I, T)$  politóp perfekt és szeminodális. Szimmetriacsoportja:  $G(X(H, I, T)) = [[3, 3, 3]]$ .  $f$ -vektora:  $f(X(H, I, T)) = (100, 450, 600, 250)$ . Orbit vektora:  $\theta(X(H, I, T)) = (3, 5, 4, 3)$ .



*Bizonyítás.* Tekintsük a  $T$  típusú csúcsok halmazát és a  $H$  típusú csúcsok halmazát. Mivel mindkét halmaz nodális csúcsokból áll, önmagában egyik sem változtatható meg, és a gömbi képben egymáshoz képest sem mozdíthatók el anélkül, hogy az egyesítésük szimmetriája meg ne változna. Így az euklideszi térben a változtatás egyetlen lehetősége az, hogy vesszük az egyik halmaznak az  $X(H, I, T)$  középpontjára vonatkozó homotétikus képét. Ekkor azonban  $X$  egy celláján belül a  $T$  típusú csúcsok súlypontja nem fog egybeesni a  $H$  típusú csúcsok súlypontjával, tehát nem keletkezik deltoid-dodekaéder hiperlap, ami ellentmond a konstrukció kiindulópontjának. Másrészt, ha egy deltoid-dodekaédernek az ilyen típusú csúcsai rögzítettek, akkor az  $E'$  típusú csúcsainak a helyzete már egyértelműen meghatározott. Ezért politópunk perfekt.

Az  $X(I, T)$  politóphoz hasonlóan, az  $E'$  típusú csúcsok itt sem nodálisak.  $X(H, I, T)$  négyoldalú gúla alakú hiperlapjainak elhelyezkedéséből pedig látható, hogy az  $X(H, I, T)^*$  polárisnak is vannak nemnodális csúcsai. Tehát  $X(H, I, T)$  szemिनodális.

A konstrukció megőrzi a szimmetriát, tehát  $X(H, I, T)$  szimmetriacsoportja megegyezik a  $G(X) = [[3, 3, 3]]$  csoporttal. Az  $f$ -vektor és orbit vektor komponenseinek kiszámítása a fent ismertetett lapstruktúra alapján,  $X$   $f$ -vektorát figyelembe véve, egyszerű feladat, aminek részleteit mellőzzük. ■

TÍPUS	FOKSZÁM	CSATLAKOZÓ HIPERLAPOK	ELŐFORDU- LÁSI SZÁM	HOSSZÚSÁG
$E'H$	4	1 deltoid-dodekaéder 3 négyoldalú gúla	120	$\frac{\sqrt{17}}{4} \approx 1,0308$
$E'T$	5	1 deltoid-dodekaéder 2 négyoldalú gúla 2 tetraéder	120	$\frac{5}{4}$
$E'T$	6	2 négyoldalú gúla 4 tetraéder	60	$\frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0,5590$
$E'E'$	3	2 négyoldalú gúla 1 tetraéder	120	$\frac{\sqrt{70}}{8} \approx 1,0458$
$TT$	4	4 tetraéder	30	$\frac{2\sqrt{5}}{3} \approx 1,4907$

5.3. táblázat

Megjegyezzük, hogy az előző négy politóptípussal ellentétben, itt nem lehetséges egy perfekt 48-cellából kiinduló analóg konstrukció. Bár létezik a deltoid-dodekaédernek egy analogonja, nevezetesen a *deltoid-ikozitetraéder* [8, 54, 55], ennek azonban egy analóg befoglalása nem az arkhimédeszi csonkított kockával, hanem az arkhimédeszi csonkított oktaéderrel kapcsolatban létezik.

## 6. Egy osztályozási séma

Ebben a fejezetben – az eddigiek összefoglalásaként is – röviden áttekintjük, milyen szempontok kínálkoznak a jelenleg ismert perfekt 4-politópok osztályozására.

Mivel az összes ismert perfekt politóp szimmetriacsoportja vagy Coxeter-csoport, vagy Coxeter-csoporttal közeli rokonságban álló csoport, az első és természetes módon adódó szempont az, hogy Wythoff-politóppal, vagy nem-Wythoff politóppal van-e dolgunk. Az ismert 4-dimenziós perfekt Wythoff-politópokat a 3. fejezetben tekintettük át. Láttuk azt is, hogy ez az osztály 3 páronként diszjunkt alosztályra bontható, melyeket első, második, illetve harmadik fajta perfekt Wythoff-politópok osztályaként tudtunk megadni, a konstrukció kezdőpontjának helyzetétől, illetve a konstrukcióban szereplő csoporttól függően. Megjegyezzük, hogy ezek a kritériumok nyilvánvalóan kiterjeszthetők  $d$ -politópokra tetszőleges  $d$  mellett, és ekkor a perfekt 2-, illetve 3-politópok a Wythoff-politópok osztályába esnek, azon belül pedig az első fajtájúak alosztályába.

Egy másik dichotómia szerint politópjainkat nodális, vagy szemínodális politópok osztályába sorolhatjuk. A 3. és 4. fejezetben az első, az 5. fejezetben pedig a második osztályba tartozó politópokat tárgyaltunk.

A két szempontot az alábbi séma szerint egyesítve perfekt politópjainkat 3 osztályba sorolhatjuk:

<i>Wythoff</i>	<i>Nem-Wythoff</i>	
<i>Nodális</i>		<i>Szemínodális</i>
↓		
<i>W</i> & <i>N</i>	<i>NW</i> & <i>N</i>	<i>NW</i> & <i>SN</i>

Megjegyezzük, hogy mivel a nodális, illetve szemínodális politópok definíciója is dimenziószámtól független, sémánk tetszőleges dimenzióban alkalmazható.

Hangsúlyoznunk kell, hogy az itt megadott osztályok egyikéről sem tudjuk jelenleg, hogy teljes-e. Sőt, nem-Wythoff 4-politópok esetében biztosan tudjuk, hogy léteznek újabb perfekt típusok, minthogy ilyenek a jelen dolgozat írásának idején is fölmerültek. A részletek kidolgozása azonban további munkát igényel.



## 7. Kitekintés

Az előző fejezetekben leírt konstrukciók olyan eredményekhez is vezettek, amelyek a dolgozat szorosan vett tárgyától különböző területeken, vagy attól függetlenül, önmagukban is érdekesek. Ebben a fejezetben ezek közül említünk néhányat.

### 7.1. Barátságos politópok

A 4.2. alfejezetben konstruált politópok esetében érdekes egybeesést vehetünk észre:

$$f(B_4(0, 2)) = f(B_4(1, 3)) \quad \text{és} \quad f(H_4(0, 2)) = f(H_4(1, 3)),$$

azaz a megfelelő  $f$ -vektorok egybeesnek (4.2. táblázat). Az ilyen politópokra külön elnevezést vezettünk be (Gévy, [37]):

**7.1. Definíció.** Azonos  $f$ -vektorral rendelkező, kombinatorikusan nem ekvivalens politópokat *barátságos politópoknak* nevezünk.

Világos, hogy általában triviális feladat barátságos politópok előállítása, pl. ugyanazon politóp két különböző alkalmas csonkításával. Itt azonban megegyező (és magas) szimmetriájú, sőt azonos orbit vektorral rendelkező politópok példáját láthatjuk. Ilyen kiegészítő feltétel mellett már nem triviális probléma barátságos politóp párok keresése. Ezzel kapcsolatban természetes módon adódik a következő

**7.2. Probléma.** Adott  $d$  dimenziószám mellett, azonos orbit vektorral rendelkező barátságos  $d$ -politópok esetén mekkora lehet az orbit vektor komponenseinek legkisebb értéke?

Idézett példáinkban az azonos orbit vektor:  $(3, 2, 2, 2)$ . Három dimenzióban az egyik lehetséges minimumra, ami  $(1, 1, 2)$ , ismerünk példákat; ezeket arkhimédeszi testek következő párjai szolgáltatják: (csonkított kocka, csonkított oktaéder), (csonkított dodekaéder, csonkított ikozaéder).

Megjegyezzük, hogy egy frissen megjelent dolgozatban [68] a szerzők kiemelik már olyan kombinatorikusan különböző 4-politópok érdekességét is, amelyek  $f_0$  és  $f_3$  értéke megegyezik (Corollary 4.4). A kiegészítő feltétel ezúttal más: a pár egyik tagja *2-egyszerű*, *2-szimplexiális* politóp, a másik pedig nem ilyen (egy

politóp 2-egyszerű, 2-szimpliciális, ha mind saját magának, mind pedig duálisának a 2-lapjai háromszögek).

## 7.2. Kövér politópok

A *kövérségnek* nevezett  $\phi$  paraméter fogalmát Eppstein, Kuperberg és Ziegler [25] vezette be 4-politópokra; definíciójuk szerint egy  $P$  4-politóp kövérsége:

$$\phi(P) = \frac{f_1(P) + f_1(P)}{f_0(P) + f_3(P)}$$

Ezzel kapcsolatban felvetik azt a problémát, hogy korlátos-e 4-politópok kövérsége? A probléma jelenleg még megválaszolatlan (egyetlen ismert 4-politóp sem éri el a  $\phi = 6$  értéket). Természetesen, folyik a keresés mind magasabb  $\phi$ -értéket mutató 4-politópok után. Az eddig publikált eredmények szerint a „legkövérebb” 4-politópok 2-egyszerű, 2-szimpliciális politópok. Ezek között a legkorábbról ismert egyik nevezetes példa éppen az  $f_1H_4$  politóp, melyet a 3.2. alfejezetben konstruáltunk meg, és amelyre:

$$f(f_1H_4) = (720, 3600, 3600, 720); \quad \phi(f_1H_4) = 5$$

(ld. 3.1. táblázat). Paffenholz és Ziegler [68] bevezetnek egy nagyon általános – általuk *E-konstrukciónak* nevezett – konstrukciót, melynek egy speciális alkalmazásaként egyebek között az  $f_1H_4$  politópot is előállítják. Az idézett dolgozatban azonban kitérnek arra (3.3.3. alfejezet), hogy ennek a politópnak a legkorábbi leírása Gévay [31], illetve [35] dolgozatában fordul elő (ld. még [69]).

A kövérség problémáját a következő alfejezetben még egyszer érinteni fogjuk.

## 7.3. Egy politóprealizációs probléma

Ebben az alfejezetben vázlatosan ismertetünk egy konstrukciót, amelynek kidolgozásával a szerző egyik célja az volt, hogy önduális perfekt 4-politópok egy végtelen sorozatát nyerje. Az eredeti célt ugyan csak részben sikerült megvalósítani – perfekt politópok nyerhetők a segítségével, de ezek nem önduálisak – a konstrukciónak azonban számos érdekes vonatkozása derült ki, egyebek között kombinatorikus-geometriai szempontból is.

Maga a konstrukció a következő. Vegyük az  $S_n$  szabályos  $n$ -szög két egybevágó példányát és képezzük az  $S_n \diamond S_n$  ( $n = 3, 4, \dots$ ) ko-szorzatot. Az így kapott 4-politóp hiperlap-tranzitív,  $n^2$  (egybevágó) tetragonális diszfenoid hiperlap határolja és szimmetriacsoportja izomorf a

$$D_n \times D_n \rtimes C_n \tag{7.1}$$

csoporttal (ahol  $D_n$  a  $2n$ -edrendű diédercsoportot jelöli, a  $C_2$  ciklikus csoport pedig a két sokszögpéldány felcseréléséért felelős a szorzatban). Mivel csúcstranzitív is, (alkalmas méretezés mellett) az  $S^3$  gömbbe írható. Minden egyes csúcának stabilizátora a  $\bullet \xrightarrow{n} \bullet \cong D_{nh}$  csoporttal izomorf. Radiális vetítéssel a gömbi képet előállítva a csúcsok tehát fixen maradnak, és ugyancsak változatlanul maradnak a stabilizátorok is. Az  $S^3$  gömbön így előálló tesszelációból most egy másikat képezünk, a következőképpen. Minden egyes (gömbi)  $D$  diszfenoid esetén vesszük  $D$  összes élfelezőpontjának konvex burkát (természetesen szférikus értelemben). Egyúttal, minden egyes  $V$  csúcs esetén vesszük a  $V$ -ből induló összes élék felezőpontjának (szférikus) konvex burkát.

Az így kapott új tesszeláció tartományai a következők. A diszfenoidokból  $n^2$  tetragonális dipiramis keletkezett (ezek tulajdonképpen egy speciális csonkítással álltak elő – kombinatorikus oktaédereknek is tekinthetők). Az eredeti csúcsok megszűnésével pedig  $2n$  darab  $n$ -gonális dipiramis keletkezett – ezeknek a szimmetriacsoportja és stabilizátora egyaránt a  $D_{nh}$  csoporttal izomorf (megegyezik az eredeti csúcsok stabilizátoraival).

Ez a tesszeláció az  $n = 4$  esetben nem más, mint a szabályos 24-cella gömbi képe. Valóban, az  $S_4 \diamond S_4$  politóp éppen a szabályos 16-cella, és a fenti eljárás annak felel meg, ahogyan a csúcsok csonkításával ebből előállítjuk a 24-cellát („*Cesàro-konstrukció*”, [13], 8.2. alfejezet.)

Némi számolás árán – melynek részleteit itt mellőzzük – azonban bizonyítható, hogy  $n = 3$ , illetve  $n > 4$  esetben nincs olyan 4-politóp, amelynek a szóban forgó tesszeláció a gömbi képe.

A politóp hozzárendelésének ez a problémája egy általánosabb formában újrafogalmazható, és ekkor már egyáltalán nem könnyű a válaszadás. Tekintsük azt a halmazrendszert, amelynek elemei a vizsgált tesszeláció (szférikus)  $k$ -lapjai ( $0 \leq k \leq 3$ ). Így egy kombinatorikus struktúrát – *polihedrális gömböt* – kapunk, amelyet  $GS_n$ -nel fogunk jelölni. Legyen  $\overline{GS}_n$  az a halmazrendszer, amelyet  $GS_n$ -ből az  $S^3$  gömb és az üres halmaz hozzávételével kapunk, legyen továbbá „ $\leq$ ” a halmazelméleti tartalmazási relációnak megfelelő természetes rendezés. Ekkor a  $(\overline{GS}_n, \leq)$  pár egy részbenrendezett halmaz, ami egyúttal háló is (ezt  $\overline{GS}_n$  *laphálójának* nevezzük). A továbbiakban az egyszerűség kedvéért ezt a hálót is  $\overline{GS}_n$ -nel fogjuk jelölni. Adódik ekkor a következő

**7.3. Probléma.** Létezik-e olyan  $P$  politóp, amelynek  $L(P)$  laphálója izomorf  $\overline{GS}_n$ -nel?

$GS_n$ -t *politopálisnak* nevezzük, ha a kérdéses  $P$  politóp létezik.

Általában, egy adott  $L$  háló politopalitásának kérdése *Steinitz-probléma* néven is ismeretes, és ez a kombinatorikus geometria egy nehéz problémája [5].





A  $GS_n$  gömb politopalitásának problémáját Jürgen Bokowski az általa kidolgozott, irányított matroidok alkalmazásán alapuló technikával behatóan tanulmányozta [3]. A probléma külön érdekessége, hogy  $GS_n$  önduális (ezt egy mástól függetlenül Gévay [3] és – egy általánosabb megközelítésben – Ziegler bizonyította [70, 86]). Ezen túlmenően,  $n = 3$  esetben ez szolgáltatja a legkisebb ismert önduális gömböt, melynek politopalitása kérdéses [4]:  $f(GS_n) = (15, 54, 54, 15)$ .

Időközben – egy friss informális bejelentés szerint [86] – Santos talált politopális realizációt az  $n = 3$  esetben, majd nem sokkal később Paffenholz tetszőleges  $n$ -re. (Paffenholz eredménye valójában még ennél is általánosabb, ugyanis kiderült, hogy a fenti konstrukció kiindulópontjául szolgáló  $S_n \diamond S_n$  politóp  $S_m \diamond S_n$  alakú is lehet, ahol  $m, n$  egymástól függetlenül változhat. A végeredményként kapott kombinatorikus gömb még mindig önduális, és előáll  $E(S_m \diamond S_n)$  alakban, ahol „ $E$ ” a Paffenholz és Ziegler által kidolgozott „ $E$ -konstrukcióra” utal [68].)

Egy ilyen eredmény – amennyiben bizonyítása napvilágot lát – több érdekes következménnyel jár, amelyek közül most csupán kettőt említünk.

- Mivel  $m = n$  esetén

$$f(E(S_n \diamond S_n)) = f(GS_n) = (n^2 + 2n, 6n^2, 6n^2, n^2 + 2n),$$

a  $GS_n$  realizációjaként előálló politópok

$$\phi(GS_n) = \frac{6n^2}{n^2 + 2n}$$

kövérsege tetszőlegesen megközelíti a 6-ot.

- Ezeket a politópokat általában a 7.1. csoportnak megfelelő (geometriai) szimmetria jelentős redukciója árán lehet realizálni (a kombinatorikus szimmetria továbbra is ugyanezzel a csoporttal írható le). Ennek megfelelően általában nem várható, hogy perfekt politópok forduljanak elő közöttük. Néhány esetben azonban mégis lehet erre számítani. Ennek az a külön érdekessége, hogy választ kaphatunk a szerző egy problémájára [35]:

#### 7.4. Probléma. Létezik-e királis perfekt politóp?

(*Királisnak* nevezünk egy politópot, ha szimmetriacsoportja nem tartalmaz irányításváltó izometriát.) A részletek ugyan még kidolgozásra várnak, de várakozásunkat már most megfogalmazhatjuk, a következőképpen:

**7.5. Sejtés.** Az  $E(S_3 \diamond S_n)$  ( $n = 3, 4, 5, 6$ ) politópok realizálhatók királis perfekt politópként.

## 8. Összefoglaló

Az értekezés tárgya perfekt 4-politópok konstrukciója és osztályozása. Szemléletesen szólva, egy politóp perfekt, ha geometriai alakja nem változtatható meg anélkül, hogy szimmetriacsoportjának a hatása meg ne változna rajta. A két- és háromdimenziós perfekt politópok jól ismertek, négy dimenziótól kezdve azonban sem teljes leírásuk, sem osztályozásuk nem megoldott. Az értekezésben megadott konstrukciókkal, illetve az ezek révén előállított politópok leírásával ennek a problémának a megoldásához szeretnénk hozzájárulni.

Az 1., bevezető fejezetben röviden vázoljuk azt a fogalmi környezetet, amelybe a perfekt politópok fogalma illeszkedik. A történeti kiindulópontot a szabályos poliéderek, illetve általánosabban, a szabályos politópok jelentik. Ennek hangsúlyozása kétszeresen is indokolt, minthogy egyfelől a perfekt politópok a szabályos politópok általánosításának tekinthetők, másfelől az ismert perfekt politópok szimmetriája közel áll azokéhoz.

A 2. fejezetben áttekintjük a legfontosabb előismereteket. Először sorra vesszük a konvex politópok elméletének néhány alapvető fogalmát, illetve állítását. Itt a standard fogalomrendszertől néhány ponton eltérünk. Így például, mivel konstrukcióink java részében az  $S^3$  gömbön dolgozunk, szükségünk van bizonyos konvexitási fogalmak szférikus változatára is. A politópokon ható izometriacsoportokkal kapcsolatos néhány fontosabb fogalom tárgyalása után röviden ismertetjük a különböző szimmetriafeltételekkel jellemzett klasszikus politópfajták közül azokat, amelyek konstrukcióinkban szerepet játszanak. Külön kitérünk a szabályos politópok rövid ismertetésére, amelyhez előbb a Coxeter-csoportok alaptulajdonságait, illetve a Wythoff-konstrukciót tekintjük át. A Wythoff-konstrukció azért is fontos számunkra, mert a perfekt politópok egy része ezzel a konstrukcióval állítható elő, azaz *Wythoff-politóp*. Az utolsó alfejezetben rövid általános leírást adunk a perfekt politópokról. Itt adjuk meg – Robertson nyomán – politópok *szimmetria-ekvivalenciájának* és *perfektségének* definícióját. Kitérünk arra is, hogy mely ponton csatlakozik munkánk a perfekt politópok Robertson által elindított vizsgálatához. Ez a pont Rostami 1987-ből származó sejtése, illetve az ezzel kapcsolatos Madden-féle hibás klasszifikációs tétel. A saját eredmények közül itt vezetjük be a *nodális politóp* fogalmát, illetve itt bizonyítjuk azt az általános tételt, mely szerint *minden csúcstranzitív nodális politóp perfekt* (2.14. Tétel). (Ez a fogalom, illetve tétel a szerző [35] cikkéből származik; közelítőleg kifejezve, egy politóp nodális, ha összes csúcsának „szabadsági foka” nulla.)

A különböző perfekt 4-politóp típusok konstrukciójának tárgyalása a 3. fejezetben kezdődik, amely Wythoff-féle perfekt politópokról szól. Ezeknek 3 alosztályát különböztetjük meg, melyeket *első*, *második*, illetve *harmadik fajta* Wythoff-politópoknak neveztünk el. Az első fajtájúak olyan Wythoff-konstrukcióval kaphatók, ahol a konstrukció kezdőpontja egy Coxeter-csoport (szférikus szimplex alakú) alaptartományának a csúcsa. (Ezek pontosan a Rostami-sejtés által megengedett prím perfekt politópok.) A 3.2. alfejezetben a *Kepler-politópokat* tárgyaljuk. Négy dimenzióban ezek megegyeznek az első fajta Wythoff-politópok polárisaival. Megmutatjuk, hogy ezek előállíthatók egy a Wythoff-konstrukciótól független konstrukcióval, amely egy Coxeter-csoportéhoz tartozó fundamentális tesszeláció faktorizációján alapul. (A Kepler-politópok fogalmát és a faktortesszelációs konstrukciót a szerző a [31] cikkében vezette be.) A 4-dimenziós nem-szabályos Kepler-politópok egy további konstrukció kiindulópontjául fognak szolgálni, ezért kissé részletesebben is leírjuk néhány tulajdonságukat. Egyebek között, megadjuk a szimmetriacsoportjukat,  $f$ -vektorukat és orbit vektorukat (ezeket egyébként a dolgozatban leírt minden perfekt politóptípus esetén meghatározzuk).

A második fajta Wythoff-politópok esetében a Wythoff-konstrukció kezdőpontja a fundamentális szimplex valamely  $k$ -dimenziós ( $k \leq 1$ ) lapjának relatív belsejében van. Az ilyen perfekt 4-politópok a Rostami-sejtéssel szemben már ellenpéldát jelentenek (abban az esetben, ha prímelek, azaz nem bonthatók alacsonyabb dimenziójú politópok szorzatára vagy ko-szorzatára). A 3.3. alfejezetben megmutatjuk négy ilyen típusnak a létezését, és ezek közül kettőnek a szerkezetét, illetve a szimmetriatulajdonságait részletesebben is megvizsgáljuk. Ezek: a Coxeter által  $t_{1,2}\alpha_4$  szimbólummal jelölt uniform 10-cella, valamint a  $t_{1,2}\{3,4,3\}$  jelű uniform 48-cella (ezeket mi itt  $X$ , illetve  $Y$  szimbólummal jelöljük). A faktortesszelációs konstrukció alkalmazásával mind a 4 Wythoff-típus polárisának is megadjuk a szerkezetét (3.4. alfejezet).

A harmadik fajta Wythoff-politópok esetében a Wythoff-konstrukcióban alkalmazott csoport már csak egy Coxeter-csoport 2 indexű forgási részcsoporthoz lehet. A 3.5. alfejezetben ilyen perfekt 4-politópok egy végtelen sorozatát konstruáljuk meg, a polárisaikkal együtt. Ez utóbbiak a Coxeter által „fél-mérték-politópoknak” nevezett politóptípus általánosításának tekinthetők. A szimmetriacsoportjukra vonatkozóan megállapítjuk a  $[[2p, 2^+, 2p]] \cong [p, 2, p]^+ \rtimes D_{2d}$  izomorfizmust.

A 4. fejezetben megmutatjuk, hogy olyan perfekt  $P$  politóp is létezik, hogy sem  $P$ , sem a  $P^*$  poláris nem állítható elő Wythoff-konstrukcióval. Az ilyen *nem-Wythoff politópokkal* fogalmilag még messzebb kerülünk a Rostami-sejtés által megengedett (első fajta, Wythoff) perfekt politópoktól. Az itt leírt perfekt politópok (vagy a polárisaik) azonban még mindig nodálisak. A 4.1. alfejezetben sza-



bálys 4-politópokból állítunk elő ilyeneket, oly módon, hogy azok hiperlapjaiba meghatározott szimmetria-feltételek mellett perfekt 3-politópokat foglalunk. Az így kapott politópokat két másik konstrukcióval is előállítjuk, amelyek közül az első a perfektség könnyebb bizonyítását szolgálja, a második pedig a korábban előállított Kepler-politópokkal való kapcsolatot mutatja, és így felhasználható egy újabb alosztály előállítására.

Ez utóbbi konstrukció egy módosítása Kepler-politópok részleges csonkítását eredményezi (4.2. alfejezet). Az ily módon előálló perfekt politópok polárisát pedig a 4.3. alfejezetben konstruáljuk meg, szintén Kepler-politópokból kiindulva. Végül, a 4.4. alfejezetben egy egyedi perfekt politóptípust előállítunk elő olyan konstrukcióval, melynek kiindulópontja az  $X$  (perfekt, uniform) 10-cella.

Az 5. fejezetben a *szeminodális politópok* fogalmának bevezetésével, illetve ilyen politópok tényleges megadásával tovább szélesítjük a perfekt politópok körét – egyúttal, az eredeti fogalmi kiindulópontunktól még távolabb kerülünk. (Egy  $P$  politópot szeminodálisnak nevezünk, ha sem  $P$ , sem  $P^*$  nem nodális politóp.) Itt mind az öt alfejezetben egy-egy egyedi politóptípust konstruálunk meg. Az első két esetben a 4.1. alfejezetben bevezetett konstrukciót alkalmazzuk úgy, hogy a kiindulópont szabályos politópok helyett ezúttal az  $X$ , illetve  $Y$  politóp. Az 5.3., illetve 5.4. alfejezetben ugyanebből a két politópból indulunk ki; a konstrukció itt egy általánosan kevésbé alkalmazható ad hoc eljárás, amelynek kulcsalakzata mindkét – egymással analóg – esetben *tetragonális szkalenoéder*. (Ez egy laptranzitív 3-politóp, amely az oktaéderrel kombinatorikusan ekvivalens és a geometriai krisztallográfiában kristályformaként ismeretes.) Az utolsó, 5.5. alfejezetben a kulcsalakzat szintén egy kristályformaként ismert laptranzitív 3-politóp, a *deltoiddodekaéder*. Az ezen konstrukciók során kapott politópok viszonylag összetettebbek, és a szerkezetük meghatározása részletesebb vizsgálatot igényel (egyebek között, néhány egyszerűbb analitikus geometriai számítást az  $\mathbb{E}^4$  térben, aminek a dolgozatban csak a végeredményét közöljük).

Az összes eddig megismert perfekt politóp birtokában a 6. fejezetben egy egyszerű sémát javasolunk ezeknek az osztályozására. Ez azon a két dichotómián alapszik, hogy egy politóp Wythoff ( $W$ ), vagy nem-Wythoff ( $NW$ ), illetve, hogy nodális ( $N$ ), vagy szeminodális ( $SN$ ).  $W$  és  $SN$  egymást kizáró feltételeket jelentenek, így összesen a következő három, páronként diszjunkt osztály adódik: (1)  $W$  &  $N$ ; (2)  $NW$  &  $N$ ; (3)  $NW$  &  $SN$ . A séma tetszőleges dimenzióban is alkalmazható, 2 és 3 dimenzióban például az összes perfekt politóp az (1) osztályba tartozik. Hangsúlyozzuk azonban, hogy 4 dimenzióban egyik osztályunkról sem tudjuk még, hogy teljes áttekintésünk van-e róla.

A 7. fejezetben néhány olyan eredményt említünk, amelyek, bár az előbbiekben leírt perfekt politópokkal kapcsolatosak, de azoktól függetlenül, önmagukban is érdekesek. A 7.1. alfejezetben megegyező  $f$ -vektorú, de kombinatorikusan

nem izomorf politópokról szólunk röviden; ilyeneket a 4.2. alfejezetben konstruált politópok között találtunk.

A 7.2. alfejezetben az  $f_1H_4$  dipiramidális Kepler-politóp egy érdekes tulajdonságát említjük. Ennek a politópnak a konstrukcióját a 3.2. alfejezetben írtuk le részletesen. Ziegler egy friss publikációjából kiderül, hogy ez a legkorábban (1994. óta, ld. Gévay, [31]) ismert olyan 4-politóp, amelynek egy kombinatorikus paramétere különösen magas értéket mutat (a Ziegler által bevezetett  $\phi$  „kövérség” értéke 5).

Végül, a 7.3. alfejezetben egy olyan konstrukció néhány vonatkozását vázoljuk röviden, amely a Steinitz-problémával való kapcsolata révén a kombinatorikus geometriai irodalomban némi figyelmet keltett.

## 9. Summary

The subject of this thesis is the construction and classification of perfect 4-polytopes. Intuitively speaking, a polytope is perfect if its geometric shape cannot be changed without altering the action of its symmetry group on it. The perfect polytopes of dimension 2 and 3 are well known. However, from dimension 4 on, both the problem of their complete description and their classification is unsolved. With the constructions given in the thesis and with the description of the polytopes obtained through these constructions, our aim is to contribute to the solution of this problem.

In the 1st, introductory chapter we briefly outline the context into which the notion of a perfect polytope fits. As a historical starting point, we set out from the regular polyhedra, or more generally, from the regular polytopes. The reason of emphasizing their importance is twofold. First, perfect polytopes can be considered as a generalization of regular polytopes, and, secondly, the symmetry of the known perfect polytopes is close to their symmetry.

Chapter 2 contains some necessary preliminaries. First we briefly survey the basic notions and statements of the theory of convex polytopes. There is some digression here from the standard usage of notions. For example, since we are working in most of our constructions on the sphere  $\mathbb{S}^3$ , we also need the spherical variant of some of the notions of convexity. This is followed by a brief review of the most important notions concerning the action of isometry groups on polytopes. Then, in outline, we give the classical types of polytopes with various symmetry properties that play some role in our constructions. In a separate section, we briefly deal with the regular polytopes, after having reviewed the basic properties of Coxeter groups and Wythoff's construction. Wythoff's construction is particularly important to us, for much of the known perfect polytopes can be obtained by this construction, i.e. are *Wythoffian polytopes*. In the last section we review, in general, the perfect polytopes. We define here, following Robertson, the *symmetry equivalence* and *perfection* of polytopes. We also give here the point where our work is connecting to the topic of the investigation of perfect polytopes initiated by Robertson. This point is Rostami's conjecture from 1987 and the (erroneous) classification theorem of Madden. From among our results, here we introduce the notion of a *nodal polytope*, and prove our general theorem which states that *every vertex-transitive nodal polytope is perfect* (Theorem 2.14). (This notion and theorem appeared in the paper [35] of the author; loosely speaking, a polytope is nodal if the "degree of freedom" of each of its vertices is zero.)



The description of the construction of perfect 4-polytopes of the various types starts in Chapter 3 dealing with Wythoffian perfect polytopes. We define 3 subclasses of those under the name *Wythoffian polytopes of the first, second and third kind*, respectively. Those of the first kind can be obtained by Wythoff's construction in which the starting point is a vertex of the (spherical simplex) fundamental domain of a Coxeter group. (These are exactly the prime perfect polytopes in Rostami's conjecture.) In Section 3.2 we deal with Kepler polytopes. In dimension 4 these just coincide with the polars of Wythoffian polytopes of the first kind. We show that they can be obtained independently of Wythoff's construction by a new construction that is based on factorization of the fundamental tessellation belonging to a Coxeter group. (The notion of a Kepler polytope and the factor tessellation construction is published in paper [31] of the author.) The non-regular Kepler polytopes of dimension 4 will serve as a starting point of a further construction, therefore we describe their properties in more detail. Among other things, we give their symmetry group,  $f$ -vector and orbit vector. (Also, we determine these properties for each type of the perfect polytopes described in the thesis).

In the case of Wythoffian polytopes of the second kind the starting point of Wythoff's construction is in the relative interior of a  $k$ -face ( $k \leq 1$ ) of the fundamental simplex. Such perfect 4-polytopes already represent counter-examples to Rostami's conjecture (in the case when they are prime, that is, they cannot be given as a product or co-product of polytopes of lower dimension). In Section 3.3 we show the existence of four such types, and we investigate the structure and symmetry properties in more detail for two of them. These are: the uniform 10-cell and the uniform 48-cell for the notation of which Coxeter uses the symbol  $t_{1,2}\alpha_4$  and  $t_{1,2}\{3, 4, 3\}$ , respectively (here we denote them simply by  $X$  and  $Y$ , respectively). By an application of the factor tessellation construction, we give the polars as well for all the 4 Wythoffian types (Section 3.4).

In the case of Wythoffian polytopes of the third kind the group applied in Wythoff's construction is a rotation subgroup of index 2 of a Coxeter group. In Section 3.5 we construct an infinite series of such perfect 4-polytopes together with their polars. These latter can be considered a generalization of the type of 4-polytope that is named "half-measure polytope" by Coxeter. We establish for their symmetry group the isomorphism  $[[2p, 2^+, 2p]] \cong [p, 2, p]^+ \rtimes D_{2d}$ .

In Chapter 4 we show that there exists a perfect polytope  $P$  such that neither  $P$  nor its polar  $P^*$  can be obtained by Wythoff's construction. Such *non-Wythoffian polytopes* represent greater conceptual distance from the Wythoffian polytopes (of the first kind) allowed by Rostami's conjecture. However, the polytopes described here are still nodal. In Section 4.1 we construct such polytopes from regular 4-polytopes in the way that we place perfect 3-polytopes under cer-



tain symmetry conditions into the facets of those. We apply two other constructions for obtaining these polytopes as well. The first of these latter constructions makes possible a simpler proof of the perfectness. The other one shows a connection to the Kepler polytopes obtained earlier, and thus it can be applied in the construction of a further subclass of perfect polytopes.

Just this latter is exploited in a slightly modified form to obtain a partial truncation of Kepler polytopes (Section 4.2). We construct in Section 4.3 the polars of the polytopes obtained in this way so that we start likewise from Kepler polytopes. Finally, in Section 4.4 we produce a perfect polytope of a unique type starting from the (perfect, uniform) 10-cell  $X$ .

In Chapter 5 we extend the set of perfect polytopes by introducing the notion of a *semi-nodal polytope*, as well as by giving effectively such polytopes. These are even far from our original conceptual starting point. (We call a polytope  $P$  semi-nodal if neither  $P$  nor  $P^*$  is nodal.) Here in each of the five sections we construct a polytope of a unique type. In the first two cases we apply the construction introduced in Section 4.1 in the way that we start, instead of regular polytopes, from the polytope  $X$  and  $Y$ , respectively. In Sections 5.3 and 5.4 we start likewise from these polytopes, but here we use an ad hoc construction that is applicable in just these particular cases. In both cases, analogous to each other, a *tetragonal scalenohedron* plays the central role, which is an isohedral 3-polytope well known in geometric crystallography as a crystal form. In the last section the central figure is likewise a facet-transitive 3-polytope known as a crystal form, namely, a *deltoidal dodecahedron*. The polytopes obtained through these constructions are relatively intricate, and the determination of their structure requires a more detailed investigation (among others, we have made some analytical geometric calculations in  $\mathbb{E}^4$ , of which we only present the results without the details).

Having available all the perfect polytopes known up to now, in Chapter 6 we propose a simple scheme for their classification. This is based on two dichotomies. Namely, a polytope is either Wythoffian (W), or non-Wythoffian (NW), as well as either nodal (N), or semi-nodal (SN). W and SN mean mutually exclusive conditions, thus we obtain altogether three pairwise disjoint classes which we denote as follows: (1) W & N; (2) NW & N; (3) NW & SN. This scheme can be applied in arbitrary dimension as well; for example, in dimension 2 and 3 all the perfect polytopes belong to class (1). We emphasize, finally, that in dimension 4 the completeness is still undecided for each these classes.

In Chapter 7 we deal with some results that are connected to the polytopes constructed in the former chapters, but are interesting in themselves as well, independently of perfect polytopes. In Section 7.1 we briefly mention some combinatorially non-equivalent 4-polytopes having the same  $f$ -vector. Such polytopes occur among those that have been constructed in Section 4.2.

In Section 7.2 we mention an interesting property of  $f_1H_4$ , a dipyramidal Kepler polytope whose construction we described in detail in Section 3.2. Namely, as it turns out from a quite recent paper of Ziegler, this is the earliest known 4-polytope (cf. Gévay, 1994, [31]) such that it has a particularly high value of „fatness”  $\phi$  (this is a combinatorial parameter introduced by Ziegler;  $\phi(f_1H_4) = 5$ ).

Finally, in Section 7.3 we briefly outline some interesting aspects of a construction that raised some interest in the combinatorial geometry literature due to its connection with the Steinitz problem.



## Irodalom

- [1] ATIYAH, M., What is geometry? *Math. Gazette*, **66** (1982), 179–184.
- [2] BOKOWSKI, J., On the geometric flat embeddings of abstract complexes with symmetries, in: HOFFMANN, K. H. and WILLE, R. (Eds.), *Symmetry of Discrete Mathematical Structures and Their Symmetry Groups*, Heldermann Verlag Berlin, 1991, 1–48. o.
- [3] BOKOWSKI, J., BREMNER, D. and GÉVAY, An infinite sequence of self-polar-dual polyhedral 3-spheres, (előkészületben).
- [4] BOKOWSKI, J., személyes közlése.
- [5] BOKOWSKI, J. and STURMFELS, B., *Computational Synthetic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [6] BREHM, U. and WILLS, J. M., Polyhedral manifolds, in: GRUBER, P. M. and WILLS, J. M. (Eds.), *Handbook of Convex Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1993, 535–554. o.
- [7] BRØNDSTED, A., *An Introduction to Convex Polytopes*, Springer, Berlin, 1983.
- [8] BUERGER, M. J., *Introduction to Crystal Geometry*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1971.
- [9] CONWAY, J. H. and SLOANE, N. J. A., The cell structures of certain lattices, in: HILTON, P., HIRZEBRUCH, F. and REMMERT, R. (Eds.), *Miscellanea Mathematica*, Springer-Verlag, New York, 1991, 71–107. o.
- [10] COURT, N. A., Isogonal points for a tetrahedron, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 71–74.
- [11] COXETER, H. S. M., Wythoff's construction for uniform polytopes, *Proc. London. Math. Soc.*, **38** (1935), 327–339.
- [12] COXETER, H. S. M., Regular and semi-regular polytopes. I, *Math. Z.*, **46** (1940), 380–407.
- [13] COXETER, H. S. M., *Regular Polytopes*, Methuen, London, 1948.
- [14] COXETER, H. S. M., Polytopes in the Netherlands, *Nieuw Archief voor Wiskunde* (3) **26** (1978), 116–141.

- [15] COXETER, H. S. M., Regular and semi-regular polytopes. II, *Math. Z.*, **188** (1985), 559–591.
- [16] COXETER, H. S. M., *A geometriák alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [17] COXETER, H. S. M., Regular and semi-regular polytopes. III, *Math. Z.*, **200** (1988), 3–45.
- [18] COXETER, H. S. M. and MOSER, W. O. J., *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [19] COXETER, H. S. M., MR97a:52013 [Gévay, G., *Kepler hypersolids. Intuitive geometry (Szeged, 1991)*, 119–129, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, **63**, North-Holland, Amsterdam, 1994.], [www.ams.org/mathscinet](http://www.ams.org/mathscinet).
- [20] CROMWELL, P. R., Kepler's work on polyhedra, *Math. Intelligencer*, **17** (1995), 23–33.
- [21] CROMWELL, P. R., *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [22] CSÁKÁNY BÉLA, A Szilassi-poliéder, *Szeged*, **15**(9), (2003) 50–51.
- [23] ECKHOFF, J., Helly, Radon, and Carathéodory type theorems, in: GRUBER, P. M. and WILLS, J. M. (Eds.), *Handbook of Convex Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1993, 389–448. o.
- [24] ENGEL, P., *Geometric Crystallography – An Axiomatic Introduction to Crystallography*, Reidel, Dordrecht, 1986.
- [25] EPPSTEIN, D., KUPERBERG, G. and ZIEGLER, G. M., Fat 4-polytopes and fatter 3-spheres, in: BEZDEK A. (Ed.), *Discrete Geometry: In honour of W. Kuperberg's 60th birthday*, Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks, Vol. 253, Marcel Dekker Inc., 2003, 239–265. o. [arXiv:math.CO/0204007](https://arxiv.org/abs/math.CO/0204007).
- [26] EUKLIDÉSZ, *Elemek* (SZABÓ ÁRPÁD előszavával), Gondolat, Budapest, 1983.
- [27] FARRAN, H. R., D'AZEVEDO BREDÁ, A. M. and ROBERTSON, S. A., Classical solids, *Beiträge Algebra Geom.*, **36** (1995), 243–259.
- [28] FARRAN, H. R. and ROBERTSON, S. A., Regular convex bodies, *J. London Math. Soc.*, (2) **49** (1994), 371–384.

- [29] FEJES TÓTH, L., *Regular Figures*, Pergamon Press, New York, 1964.
- [30] GÉVAY, G., Icosahedral morphology, in: HARGITTAI, I. (Ed.), *Fivefold Symmetry*, World Scientific, Singapore, 1992, 177–203. o. MR1178746
- [31] GÉVAY, G., Kepler hypersolids, in: BÖRÖCZKY, K. and FEJES TÓTH, G. (Eds.), *Intuitive Geometry*, Proc. 3rd Int. Conf. Szeged, Hungary, Sept. 2–7, 1991, North-Holland, Amsterdam. *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, **63** (1994), 119–129. MR1383617 (97a:52013); Zbl 0818.52012
- [32] GÉVAY GÁBOR, A kaleidoszkóp tanulságai, *Magyar Tudomány*, **44** (1999), 289–294.
- [33] GÉVAY, G., Changes of shape and symmetry in the construction of perfect polytopes, in: *Extended Abstract of the International Katachi  $\cup$  Symmetry Symposium*, University of Tsukuba, Japan, 1994. Reprinted in: *Hyperspace*, **9**(1) (2000), 77–80.
- [34] GÉVAY, G., Chiral facet-transitive 4-polytopes related to regular polytopes, *Hyperspace*, **9**(3) (2000), 9–21.
- [35] GÉVAY, G., On perfect 4-polytopes, *Beiträge Algebra Geom.*, **43** (2002), 243–259. MR1913783 (2003g:52018); Zbl pre01784606
- [36] GÉVAY, G., Construction of non-Wythoffian perfect 4-polytopes, *Beiträge Algebra Geom.*, **44** (2003), 235–244. MR1990997; Zbl pre01894857
- [37] GÉVAY, G., A new class of non-Wythoffian perfect 4-polytopes, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **69** (2003), 901–910.
- [38] GÉVAY, G. and MIYAZAKI, K., Occurrence of crystal forms in the central projections of 4-dimensional polytopes, *Symmetry Cult. Sci.*, **11**(1–4) (2000), 85–116. MR2001413; Zbl pre01992666
- [39] GÉVAY, G. and MIYAZAKI, K., Some examples of semi-nodal perfect 4-polytopes, *Publ. Math. Debrecen*, **63/4** (2003), 715–735.
- [40] GÉVAY, G., On the construction of classes of perfect 4-polytopes, (előadás), *Workshop “Discrete Convex Geometry” 2.–4. February 2003 in honour of Jürgen Bokowski’s 60th birthday*, [www.mathematik.tu-darmstadt.de/ags/ag7/Workshops/Programm2.html](http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/ags/ag7/Workshops/Programm2.html).
- [41] GOODMAN, J. E. and O’ROURKE, J. O. (Eds.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [42] GOODMAN, J. E., személyes közlése.



- 
- [43] GRUBER, P. M. and WILLS, J. M. (Eds.), *Handbook of Convex Geometry*. North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [44] GRÜNBAUM, B., *Convex Polytopes*. Wiley, London, 1967.
- [45] GRÜNBAUM, B., Regular polyhedra – old and new, *Aequationes Math.*, **16**, (1977) 1–20.
- [46] GRÜNBAUM, B., *Tilings and Patterns*. Freeman, San Fransisco, 1986.
- [47] HAHN, T. (Ed.), *International Tables for X-ray Crystallography*. Vol A., Reidel, Dordrecht, 1983.
- [48] HENK, M., RICHTER-GEBERT, J. and ZIEGLER, G., Basic properties of convex polytopes, in: GOODMAN, J. E. and O’ROURKE, J. O. (Eds.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, Boca Raton, 1997, 243–270. o.
- [49] HILBERT, D. és COHN-VOSSEN, S., *Szemléletes geometria*, Gondolat, Budapest, 1982.
- [50] HOFFMANN, K. H. and WILLE, R. (Eds.), *Symmetry of Discrete Mathematical Structures and Their Symmetry Groups*, Heldermann Verlag Berlin, 1991.
- [51] HUMPHREYS, J. E., *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [52] JOHNSON, N. W., Convex polyhedra with regular faces, *Canad. J. Math.*, **18** (1966), 169–200.
- [53] KABAI, S., MIYAZAKI, K. AND GÉVAY, G. (Eds.), *Polyhedra, Symmetry Cult. Sci.*, **11** (2000), no. 1-4, International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry, Heidelberg, 2000. pp. 1–472. MR2001408
- [54] KLEBER, W., *An Introduction to Crystallography*, VEB Technik Verlag, Berlin, 1970.
- [55] KOCH SÁNDOR, SZTRÓKAY KÁLMÁN IMRE és GRASSELLY GYULA, *Ásványtan I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
- [56] KONNULLY, A. O., Isogonal conjugates in  $\mathbb{E}^n$ , *Math. Student*, **37** (1969), 29–34.
- [57] KÜROS, A. G., *Csoportelmélet*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
- [58] LAY, S. R., *Convex Sets and Their Applications*, Wiley, New york, 1982.

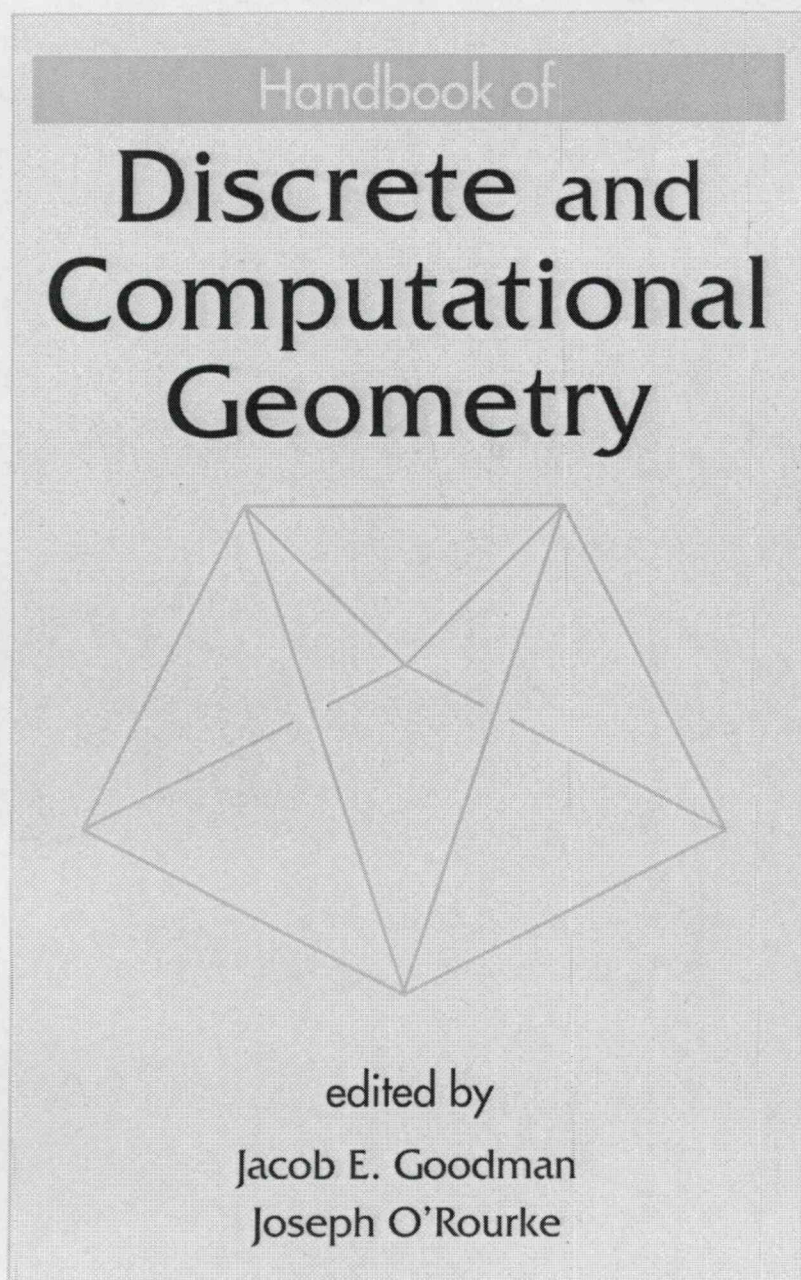
- 
- [59] MADDEN, T. M., A classification of perfect 4-solids, *Beiträge Algebra Geom.*, **36** (1995), 261–279.
  - [60] MADDEN, T. M. and ROBERTSON, S. A., The classification of regular solids, *Bull. London Math. Soc.*, **27** (1995), 363–370.
  - [61] MARTINI, H., A hierarchical classification of Euclidean polytopes with regularity properties, in: BISZTRICZKY, T., MCMULLEN, P., SCHNEIDER, R. and IVIĆ WEISS, A. (Eds.), *Polytopes: Abstract, Convex and Computational*, Cluwer, Dordrecht, 1994, 71–96. o.
  - [62] MCMULLEN, P. and SHEPHARD, G. C., *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*, London Math. Soc. Lecture Note Series **3**, Cambridge University Press, Cambridge, 1971.
  - [63] MCMULLEN, P. and SCHULTE, E., *Abstract Regular Polytopes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
  - [64] MESSER, P. W., Closed-form expressions for uniform polyhedra and their duals, *Discrete Comput. Geom.*, **27** (2002), 353–375.
  - [65] MIYAZAKI, K. and GÉVAY, G., Does nature know 4-dimensional perspective? *Bull. Soc. Sci. Form*, **17**(2) (2002), 101–102. (Japán nyelven.)
  - [66] NIGGLI, A., Zur Topologie, Metrik and Symmetrie der einfachen Kristallformen, *Schweizerische Mineralogische und Petrographische Mitteilungen*, **43** (1963), 49–58.
  - [67] NOWACKI, W., Die nichtkristallographischen Punktgruppen, *Z. Krist.*, **86** (1933), 19–31.
  - [68] PAFFENHOLZ, A. and ZIEGLER, G. M., The  $E_t$ -construction for lattices, spheres and polytopes, arXiv:math.MG/0304492, 5 May, 2003, 1–20.
  - [69] PAFFENHOLZ, A. and ZIEGLER, G. M.,  $k$ -Simplicial and 2-simple  $d$ -polytopes (*International Conference “Polyhedral Surfaces: Geometry and Combinatorics”, July 21–25, 2003, Euler Math. Inst., St. Petersburg*), Preprint. [www.math.tu-berlin.de/~paffenho/preprints.html](http://www.math.tu-berlin.de/~paffenho/preprints.html)  
[www.pdmi.ras.ru/EIMI/2003/ps](http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2003/ps)
  - [70] PAFFENHOLZ A., New polytopes derived from products (*Kolloquium über Kombinatorik – 14. und 15. November 2003, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg*), Preprint. [www.math.tu-berlin.de/~paffenho/talk-magdeburg.pdf](http://www.math.tu-berlin.de/~paffenho/talk-magdeburg.pdf)  
[www.math.tu-berlin.de/~felsner/KolKom03/heft.ps](http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/KolKom03/heft.ps)

- 
- [71] PINTO, M. R. and MADDEN, T. M., The symmetry group of perfect solids, in: ARTÉMIADIS, N. K. and STEPHANIDIS, N. K. (Eds.), *Proc. 4th Int. Cong. Geom.*, Academy of Athens – Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki, 1996, 346–350. o.
- [72] ROBERTSON, S. A., Symmetry and perfection of form, *Interdiscip. Sci. Rev.*, **6** (1981), 340–345.
- [73] ROBERTSON, S. A., *Polytopes and Symmetry*. London Math. Soc. Lecture Note Series **90**, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [74] ROBINSON, G. DE B., On the fundamental region of a group, and the family of configurations which arise therefrom, *J. London Math. Soc.*, **6** (1931), 70–75.
- [75] SCHATTSCHNEIDER, D. and SENECHAL, M., Tilings, in: GOODMAN, J. E. and O’ROURKE, J. O. (Eds.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, Boca Raton, 1997, 43–62. o.
- [76] SCHULTE, E. and WILLS, J. M., Combinatorially regular polyhedra in three-space, in: HOFFMANN, K. H. and WILLE, R. (Eds.), *Symmetry of Discrete Mathematical Structures and Their Symmetry Groups*, Heldermann Verlag Berlin, 1991, 49–88. o.
- [77] SCHULTE, E., Tilings, in: GRUBER, P. M. and WILLS, J. M. (Eds.), *Handbook of Convex Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1993, 899–932. o.
- [78] SCHULTE, E., Symmetry of polytopes and polyhedra, in: GOODMAN, J. E. and O’ROURKE, J. O. (Eds.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, Boca Raton, 1997, 311–330. o.
- [79] SENECHAL, M., *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [80] SHEPHARD, G. C., A construction for Wythoffian polytopes, *Canad. J. Math.*, **6**, (1954) 128–134.
- [81] SHERK, F. A., McMULLEN, P., THOMPSON, A. C. and Ivić WEISS, A., *Kaleidoscopes (Selected writings of H. S. M. Coxeter)*, Wiley, New York, 1995.
- [82] STILLWELL, J., The story of the 120-cell, *Notices Amer. Math. Soc.*, **48**(1), (2001) 17–24.

- [83] STRUIK, D. J., *A matematika rövid története*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1958.
- [84] SZILASSI, L., Regular toroids, *Structural Topology*, **13**, (1986) 69–80.
- [85] ZIEGLER, G. M., *Lectures on Polytopes*, Springer, New York, 1995.
- [86] ZIEGLER, G. M., személyes közlése.



## Melléklet



M.1. ábra

## *Köszönetnyilvánítás*

Köszönetemet fejezem ki a Bolyai Intézet közösségének az inspiráló légkörért, valamint a segítőkészségért, mellyel kezdettől fogva munkámat támogatták.

Köszönet illeti Koji Miyazaki professzort, aki a Kiotói Egyetemen segített abban, hogy az itt leírt eredmények egy része megszülessen.

Külön hálával tartozom Családom tagjainak, akiknek szeretete és türelmes segítőkészsége nélkül e munka nem jöhetett volna létre.